

全体	目次	前回	次回	略解
----	----	----	----	----

 更新 Time-stamp: "2004/05/26 Wed 21:02 hig"

quiz 略解 5

$$1. \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$2. \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -1.$$

$$3. \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ +3 \end{pmatrix}$$

$$4. \mathbf{B} \times (\mathbf{B} - 2\mathbf{A}) = \mathbf{B} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times 2\mathbf{A} = \mathbf{0} - (-1)(2\mathbf{A} \times \mathbf{B}) =$$

$$2\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ +6 \end{pmatrix}$$

5. 図より, 表向きであるとは, $\langle \mathbf{p}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ が左手系であることと同じ.
ここで,

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -3 < 0 \quad (44)$$

よって, 表向き.

quiz 略解 6

2つのベクトルのなす角が $\theta < \pi/6$ なら内部にある. $\theta \geq 0$ のとき,
 $\theta < \pi/6$ と $\cos \theta > \sqrt{3}/2$ は同値.

1. $p = \overrightarrow{OP_1}$ とすると, $\cos \theta = \frac{v \cdot p}{|v||p|} = \frac{25}{27} > \sqrt{3}/2$. 内部.

2. $p = \overrightarrow{OP_2}$ とすると, $v \cdot p < 0$ より, $\theta > \pi/2$. 外部.

quiz 略解 7

北方向の単位ベクトルは $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 北西方向の単位ベクトルは

$$u = \frac{j-i}{|j-i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{それぞれ,}$$

$$(r_2 - r_1) \cdot j = -7.$$

$$(r_2 - r_1) \cdot u = -\frac{9}{\sqrt{2}}.$$

5. 運動のベクトルによる表現

香中 1 章と 2 章の間

5.1 位置ベクトル

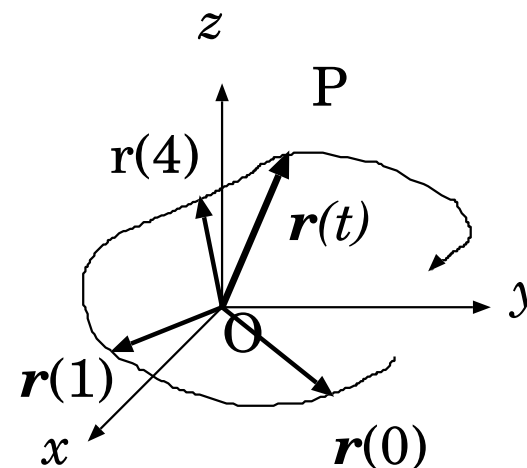
3次元空間に物体 P があって運動している. 例:飛行機, ボール, 蚊, ...

座標系 xyz と原点 O は固定する. **運動の例** \Rightarrow アニメ

ある瞬間の物体 P の位置は, 33 を O , 34 を P とするベクトル \overrightarrow{OP} で指定される. これを P の **位置ベクトル** という.

空間を物体 P が時間 t とともに, 移動していくとき P の位置ベクトルは時間の関数なので, $r(t)$ のように書く. たとえば

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ \sin t \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

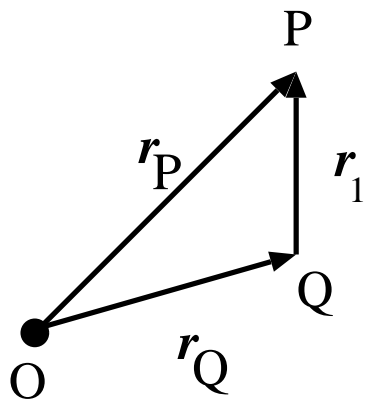


5.2 相対位置ベクトル

物体 P の位置ベクトルを r_P 物体 Q の位置ベクトルを r_Q とする.

物体 Q に対する 物体 P の **相対位置ベクトル** とは, Q から P に向かう矢印で表わされるベクトル r_1 である. いわば,

35 .



このとき,

$$r_Q + r_1 = r_P. \text{つまり } r_1 = r_P - r_Q. \quad (46)$$

5.3 距離

$\mathbf{r}_P(t) = \begin{pmatrix} x_P(t) \\ y_P(t) \\ z_P(t) \end{pmatrix}, \mathbf{r}_Q(t) = \begin{pmatrix} x_Q(t) \\ y_Q(t) \\ z_Q(t) \end{pmatrix}$ とする. 時刻 t の P と Q の間

の **距離** は

$$|\mathbf{r}_1(t)| = |\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{r}_Q(t)|$$

$$= \left[(x_P(t) - x_Q(t))^2 + (y_P(t) - y_Q(t))^2 + (z_P(t) - z_Q(t))^2 \right]^{1/2}. \quad (47)$$

時刻 t に P と Q が **衝突** する (48)

$$\iff \text{時刻 } t \text{ に } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} \quad (49)$$

$$\iff x_P(t) = x_Q(t), y_P(t) = y_Q(t), z_P(t) = z_Q(t) \quad (50)$$

$$\iff \boxed{36} \quad (51)$$

例題 10

時間帯 $0 < t < \frac{3}{4}\pi$ で、位置ベクトルが

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

にしたがって運動する物体がある。

1. 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ に最も近づく時刻 t を求めよう。
2. 点 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を、物体が通過するならその時刻 t を求めよう。

5.4 運動の軌跡

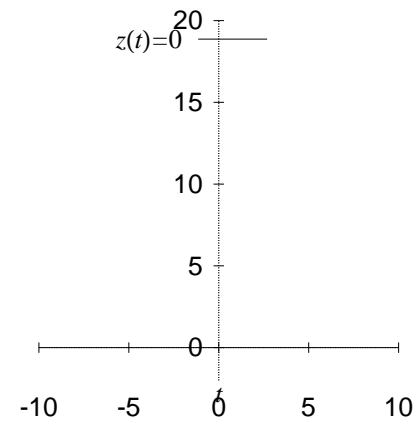
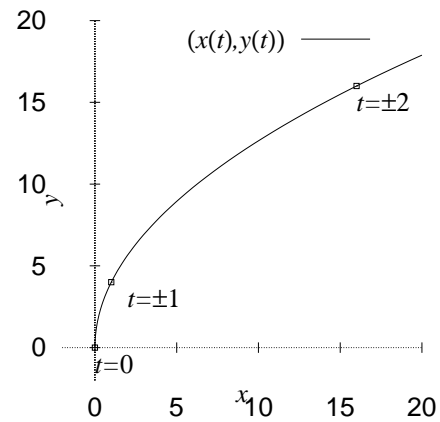
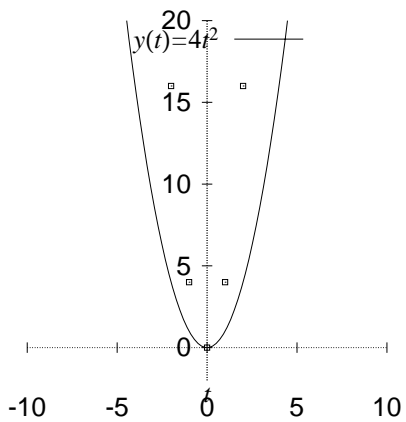
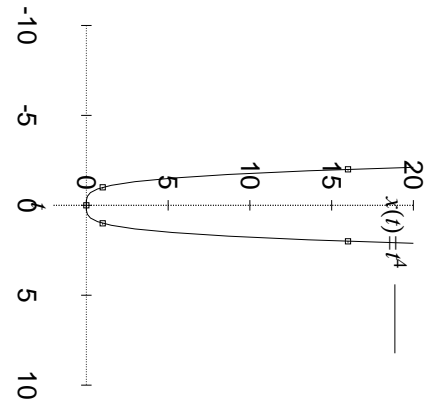
xyz 空間内で, 物体が通過した点をつないでできる曲線を **軌跡** という.

例題 11

空間を運動している物体 P の位置ベクトルは $r(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ 4t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ である. 軌跡を描こう. アニメ

5.5 $t-x, t-y, t-z$ グラフ

時間 対, x, y, z 座標のグラフを描くとわかりやすいこともある.



5.6 パラメータ表示と軌跡

一般に, t のような ‘余計な’ 変数を使って $r(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ 4t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ あるいは $x(t) = t^4, y(t) = 4t^2, z(t) = 0$ のように軌跡を表現する方法を **パラメータ表示** という.

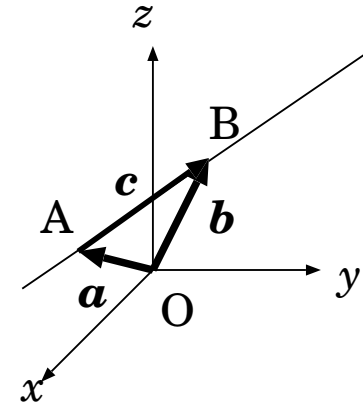
パラメータ表示から, 軌跡の方程式を導くことができる.

- 時刻 t を **パラメータ (助変数)** とする **パラメータ表示** では運動の様子がすべてわかるが、物体の通過した道は見にくい。
- **軌跡の方程式** では、物体の通過した道がどのような形になっていたかわかるが、通過した速さなどはわからない。

5.7 直線のパラメータ表示と方程式

2点 A, B を通る直線のパラメータ表示. $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$, $c = b - a$ とすると,

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} = \mathbf{a} + ct. \quad (53)$$



xy 平面内にあるとき

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする.

$$x = a_1 + c_1 t \quad (54)$$

$$y = a_2 + c_2 t \quad (55)$$

$$z = 0. \quad (56)$$

t を消去すると,

$$\frac{x-a_1}{c_1} = \frac{y-a_2}{c_2} (= t), \quad z = 0. \quad (57)$$

整理すると

$$\text{平面の直線の方程式} \quad y = \frac{c_2}{c_1}(x - a_1) + a_2, \quad z = 0. \quad (58)$$

xyz 空間内の直線

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とする.

$$x = a_1 + c_1 t \quad (59)$$

$$y = a_2 + c_2 t \quad (60)$$

$$z = a_3 + c_3 t \quad (61)$$

t を消去すると,

$$\text{空間の直線の方程式} \quad \frac{x-a_1}{c_1} = \frac{y-a_2}{c_2} = \frac{z-a_3}{c_3} (= t). \quad (62)$$

例題 12

時間帯 $0 < t < \pi$ で、位置ベクトルが

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (63)$$

にしたがって運動する物体がある.

1. 時刻 $t = \frac{\pi}{4}$ における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{4})$ を求めよう.
2. y -軸を通過する時刻を求めよう.
3. 軌跡を描こう.
4. 点 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を, 物体が通過するならその時刻 t を求めよう.

アニメ

40

quiz 8

物体 P, Q の, 時刻 t における位置ベクトルは,

$$\mathbf{r}_P(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_Q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (64)$$

で与えられる.

1. 時刻 $t = -2$ における P の位置ベクトル $\mathbf{r}_P(-2)$ を求めよう.
2. 物体 P が yz 平面 ($x = 0$) 上にある時刻を求めよう.
3. 物体 P, Q の xy 平面 ($z = 0$) 上の軌跡を描こう.
4. 物体 P と Q がもっとも接近する時刻 t と, その時の距離を求めよう.

今日, プチテスト返却します

12時30分以降です. 点数はメールで連絡します. 別のアドレスで受け取りたい人は, 13:00 までにアドレス変更してね.

今日, 特別講義あります

2004/05/26(水) 5 講時 4-201 デジカメのプログラミング

来週, 数理情報演習の説明会あります

2004/06/01(火) 5 講時 1-107 (3年生の研究室所属の説明です)