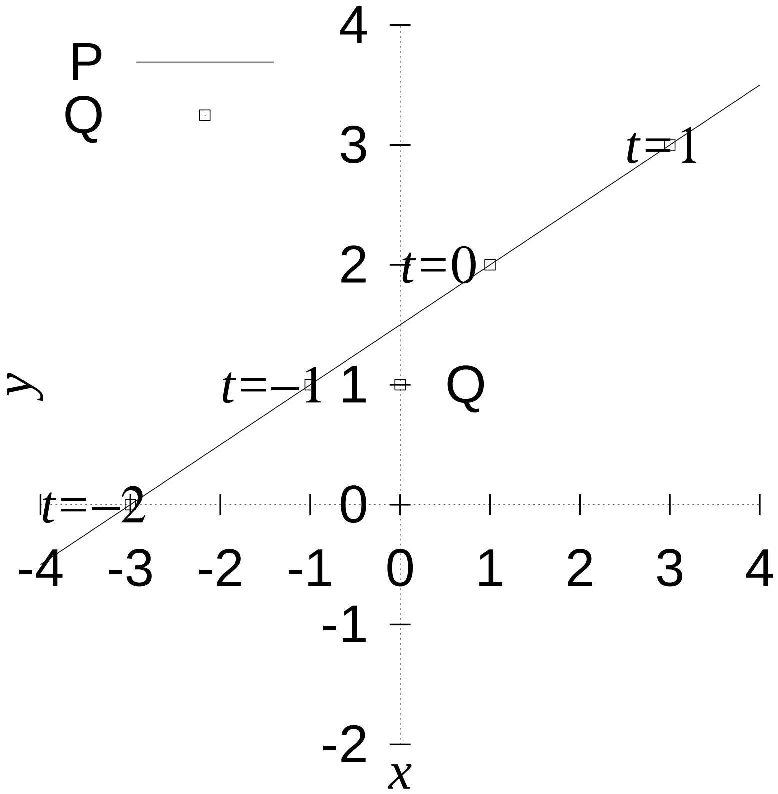
quiz 略解 8

1. $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(-2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $(x(t) =)2t + 1 = 0$ を解いて, $t = -\frac{1}{2}$.
3. $x = 2t + 1, y = t + 2$ から t を消去して, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, z = 0$.
4. 距離の 2 乗は $f(t) = 5t^2 + 6t + 2$. $f'(t) = 0$ を満す $t = -\frac{3}{5}$ で最小になり, このときの距離は $\sqrt{f(-\frac{3}{5})} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.



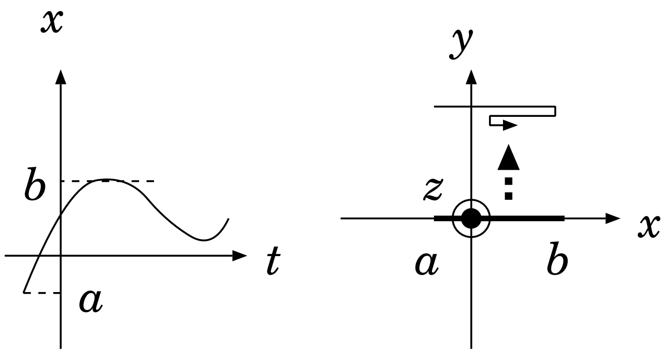
6. 速度ベクトルと加速度ベクトル

6.1 1 次元の運動

x-軸の式は $y = z = 0$ だから, x-軸の上だけを運動する物体の位置ベクトルは,

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{65}$$

となり, ただ 1 つの関数 $x(t)$ だけで表わせる. このように, 位置ベクトルの 1 成分だけで表わせる運動を 1 次元の運動という. 以下, しばらく 1 次元の運動を考える



1 次元の運動の t-x グラフと軌跡の関係

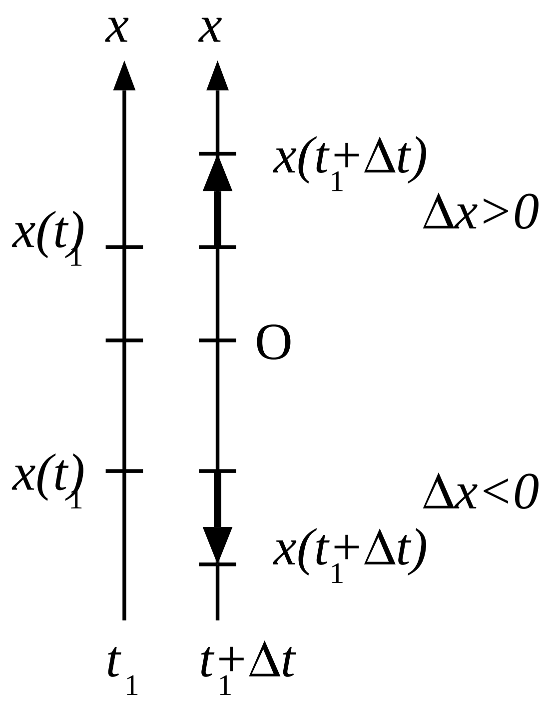
6.2 1 次元の速度

香中 p.26

時刻 t_1 **に 座標** $x(t_1)$ **にあった物体が, 時刻** $t_1 + \Delta t$ **には 座標** $x(t_1 + \Delta t)$ **まで移動していたとする. 座標の差 (変位ともいう) は**

$$\Delta x = x(t_1 + \Delta t) - x(t_1). \tag{66}$$

注: Δt **は** $\Delta \times t$ **じゃない**. Δt **(デルタティー) は短い時間を表わす変数.**



関係

$$(\text{距離}) = (\text{速さ}) \times (\text{時間}) \tag{67}$$

から,

$$(\text{時刻 } t_1 \text{ から } t_1 + \Delta t \text{ までの平均速度}) = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{(t_1 + \Delta t) - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{68}$$

瞬間の速度を求めるには, $\Delta t \to 0$ の極限を考えればよい.

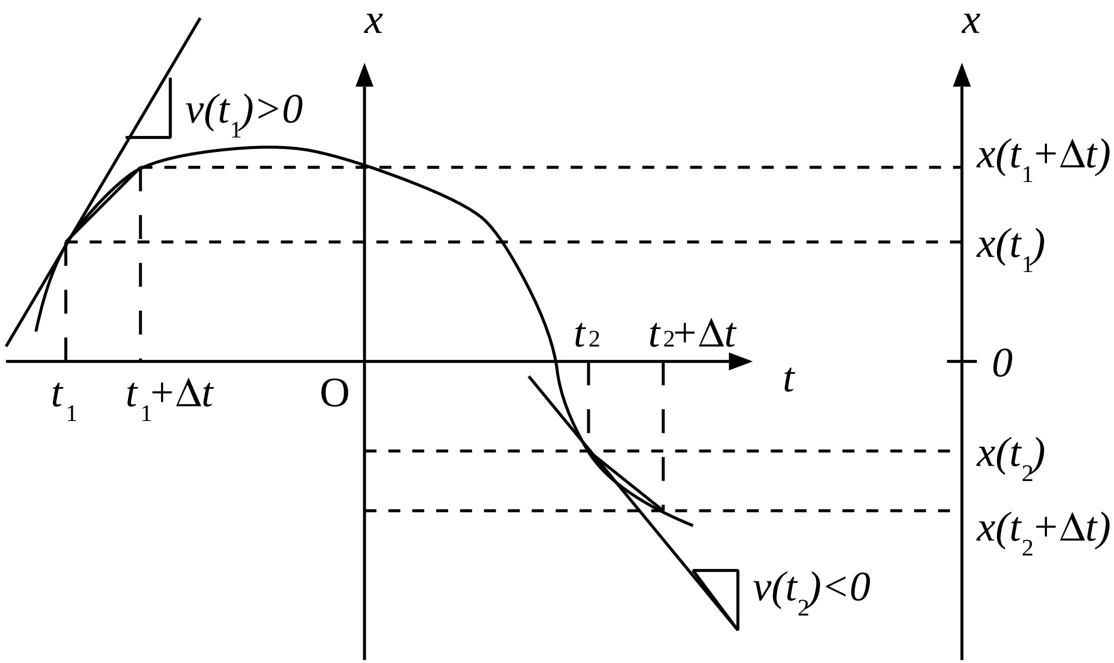
$$\text{速度 } v(t_1) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{69}$$

要するに, 座標 $x(t)$ の t についての微分 (導関数) $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ を時刻 t における物体の $\boxed{\text{速度}}$ という.

本や人によっては, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ を, $x'(t), \dot{x}(t)$ などと書いてあることもある.

バックしてるときは 速度は $\boxed{41\quad}$.

例 アニメ



速度 $v(t_1)$ **は**, $t = t_1$ **における** $x(t)$ **の接線の傾き**.

v	t-x **グラフ**	**アニメ**
$v > 0$	**右上がり**	42
$v < 0$	**右下がり**	43
$v = 0$	**水平**	44

6.3 1 次元の加速度

香中 p.27

時刻 t_1 **に 速度** $v(t_1)$ **だった物体が**, **時刻** $t_1+\Delta t$ **には 速度** $v(t_1+\Delta t)$ **に変化していたとする**. **速度の変化分は**

$$\Delta v = v(t_1+\Delta t) - v(t_1). \tag{70}$$

関係 (**変化率**) $= \frac{(\text{変化分})}{(\text{時間})}$ **から**,

$$(\text{時刻 } t_1 \text{ から } t_1+\Delta t \text{ までの速度の平均変化率}) \\ = \frac{v(t_1+\Delta t)-v(t_1)}{(t_1+\Delta t)-t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{71}$$

瞬間の変化率を求めるには, $\Delta t \to 0$ **の極限を考えればよい**. **速度の瞬間の変化率のことを**

$$\text{加速度 } a(t_1) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t_1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)(t_1) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t_1) \tag{72}$$

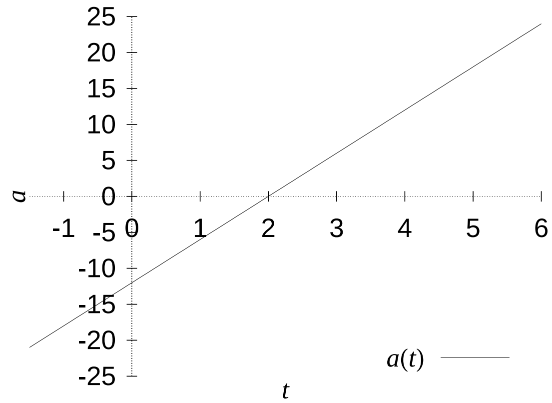
という．要するに，$\boxed{\text{加速度}}$は速度の 1 階微分，座標の 2 階微分．

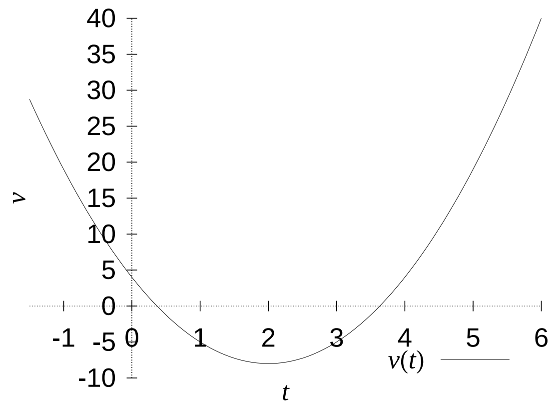
本や人によっては，$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ を，$x''(t), \ddot{x}(t)$ などと書いてあることもある．

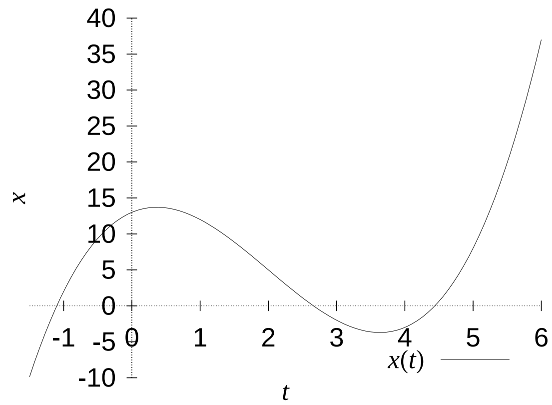
a	t 対 v	t 対 x	アニメ
$a > 0$	右上がり	45	速度増加
$a < 0$	右下がり	46	速度減少
$a = 0$	水平	47	速度一定

バックで加速してるときは　加速度は 48 ．

例 アニメ







再び, 3 **次元を運動する物体の位置ベクトル**

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$ **を考えよう**.

6.4 速度ベクトル

香中 p.30

時刻 t_1 **に 位置ベクトル** $\boldsymbol{r}(t_1)$ **にあった物体が**, **時刻** $t_1+\Delta t$ **には 位置ベクトル** $\boldsymbol{r}(t_1+\Delta t)$ **まで移動していたとする**.

Δt **秒間の変位ベクトル**

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_1+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t_1) \tag{73}$$

$$= (\Delta x)\boldsymbol{i} + (\Delta y)\boldsymbol{j} + (\Delta z)\boldsymbol{k} \tag{74}$$

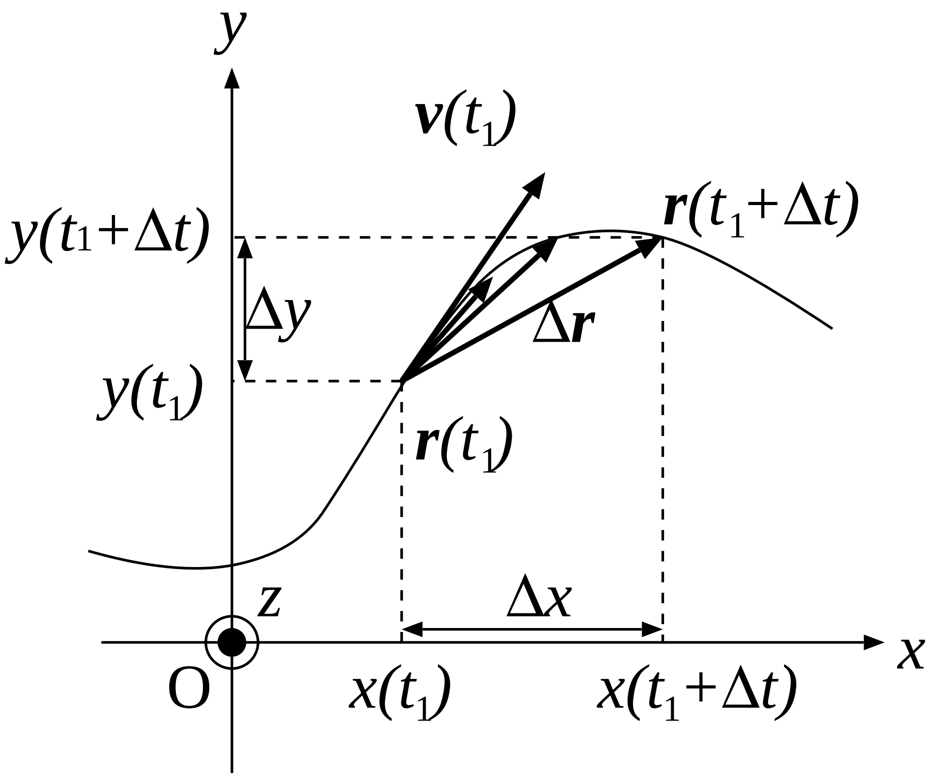
Δt **秒間の平均速度ベクトル**

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t_1+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t_1)}{\Delta t}. \tag{75}$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k} \tag{76}$$

時刻 t_1 **における** (**瞬間**) **速度ベクトル** $\boldsymbol{v}(t_1)$ **を求めるには**, $\Delta t \to 0$ **の極限を考えればよい**.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(t_1) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_1 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_1)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k} \right) \\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{k} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_1) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t_1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{77}$$



要するに成分ごとに微分すればおっけー.

一般に, 時間の関数であるベクトル (ベクトル関数) $\boldsymbol{A}(t)$ があったとき,

$$\boxed{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t_1+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t_1)}{\Delta t}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t_1)\\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t_1)\\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t_1)\end{pmatrix}} \tag{78}$$

を $\boldsymbol{A}(t)$ の $t=t_1$ における微分といい, $\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t_1)}$ **と書く.**

つまり, いまは $\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$.

優柔不断モード: こう思ったほうがわかりよい人もいる?

$$\boldsymbol{v}(t_1)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_1+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_1)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\begin{pmatrix}\frac{x(t_1+\Delta t)-x(t_1)}{\Delta t}\\ \frac{y(t_1+\Delta t)-y(t_1)}{\Delta t}\\ \frac{z(t_1+\Delta t)-z(t_1)}{\Delta t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_1)\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t_1)\end{pmatrix}$$

速さ

$$\text{時刻 } t_1 \text{ における速さ} = \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t_1) \right| . \tag{79}$$

- 49 はベクトル．大きさと向きがある．
- 50 はスカラー．速度の絶対値．大きさだけ．

アニメ	http:hig3.net> i/V/EZ アプリ > いろんな運動

速度ベクトルの性質

- 速度ベクトルの向きは 51 ．(瞬間の向き)
- 速度ベクトルの大きさは，速さに比例．(瞬間の速さ)
- 物体が静止 ⇔ 速度ベクトルが 52 ⇔ 速さが零．

6.5 加速度ベクトル

香中 p.30

時刻 t_1 における加速度ベクトル　$\boldsymbol{a}(t_1) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}(t_1)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{k}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t_1)\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t_1)\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t_1)\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t_1) \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t_1) \\ \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t_1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{80}
$$

やっぱり成分ごとに微分すればおっけー．このベクトルを，

$$\boxed{\boldsymbol{a}(t_1) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t_1)}$$

と書く．

アニメ	http://hig3.net> i/V/EZ アプリ ＞ いろんな運動

例題 13

物体が, $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t+\sin t \\ 2t+2\sin t \\ \sqrt{5}\cos t \end{pmatrix}$ **で運動している**.

1. **速度ベクトル**, **加速度ベクトルを求めよう**.
2. **静止する時刻を求めよう**.
3. **速さが最大となる時刻を求めよう**.

53

微分の計算方法忘れた人は $\boxed{\text{香中 2.2}}$ **で復習!**

quiz 9

物体が, $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2-4 \\ t^3-8 \\ -2t+3 \end{pmatrix}$ **で運動している**.

1. **速度ベクトル** $v(t)$, **加速度ベクトル** $a(t)$ **を求めよう**.
2. **速さが最小となる時刻を求めよう**.
3. **速さが最小である時刻における速度と加速度を求めよう**.

54

55

きょうのメッセージ

56

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ A_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} \tag{81}$$

きょうの i/V/EZ アプリ

http://hig3.net> i/V/EZ アプリ > いろんな運動

数検団体受験受付中です!

1-508 に置いてある郵便振替用紙で郵便局に申し込むだけです．それ以外の手続きは不要です．詳しい案内も 1-508 で配布しています．

今日，特別講義あります!

年金数理コンサルタントの役割　5 講時，4-201.

全体	目次	前回	次回	略解