| 全体 | 目次 | 前回 | 次回 | 略解 | 更新 Time-stamp: "2004/06/09 Wed 11:20 hig"

quiz 略解 9

1.

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 3t^2 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{82}$$

2. 速さを $v(t)$ とすると, $f(t) = v(t)^2 = (6t)^2 + (3t^2)^2 + (-2)^2$. これが最小になる時刻を求める. 微分して $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = 72t + 36t^3$. 増減表を書くと, $t = 0$ で最小.

3. $\boldsymbol{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 速度, 加速度と言ったらベクトルです.

夏のプチテストやります! 06/23(水) です. 科目の成績 100 点のうち 25 点分. 範囲などは掲示参照. なお, ファイナルトライアルは 07/28(水).

7. 運動方程式と積分

香中 3 章

先週のメッセージ

$\boxed{\text{位置 } \boldsymbol{r}(t)} \xrightarrow{\text{微分}} \boxed{\text{速度 } \boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)} \xrightarrow{\text{微分}} \boxed{\text{加速度 } \boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)}$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} \tag{83}$$

7.1 積分は微分の逆

戸田 1-3

変数 t **の関数** $f(t), F(t)$ **が**,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = f(t)} \tag{84}$$

を満たすとする (**例えば**, **位置** $x(t) = F(t)$, **速度** $v(t) = f(t)$). **このとき**,

$$\boxed{\int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C.} \tag{85}$$

- $f(t)$ **は** $F(t)$ **の** (1 **階**) **微分**, 57
- $F(t)$ **は** $f(t)$ **の** (**不定**) **積分**, 58

という.

> **物理系** (?) **では**,
>
> $$\int \mathrm{d}t\ f(t) \tag{86}$$
>
> **という書き方もある**. **べつにいいでしょ**?

$F(t)$ **が** $f(t)$ **の不定積分なら**, **任意の定数** C **に対して**, $F(t) + C$ **も不定積分**. **この定数** C **を積分定数という**.

積分の計算法 香中 p.50 微分積分 p.75

- $\int t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C \ (n \neq -1)$.
- $\int t^{-1} \mathrm{d}t = \log |t| + C$.
- **三角関数の積分**
- **指数関数の積分**
- **置換積分 (変数変換)**
- **部分積分**
- **公式集を見る**
- **いろんな超絶技巧**

7.2 速度の積分は位置

位置 $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, **速度** $\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **に対して**,

$$v_1(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \quad \text{だから} \quad x(t) = \int v_1(t)\mathrm{d}t + C = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t + C \quad (87)$$

位置		速度
$x(t)$	$\xrightarrow{\text{微分}}$ $\xleftarrow{\text{積分}}$	$v_1(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$

例題 14

1. 物体の速度が $v_1(t) = t^2 - \sin(2t)$ である．また, $x(0) = 2$ である．$x(2\pi)$ を求めよう．

2. 物体の速度が $v_1(t) = \frac{1}{t} - \cos(\pi t)$ である．最初 $t = 1$ から 最後 $t = 2$ までの座標の変位 $\Delta x = x(2) - x(1)$ を求めよう．

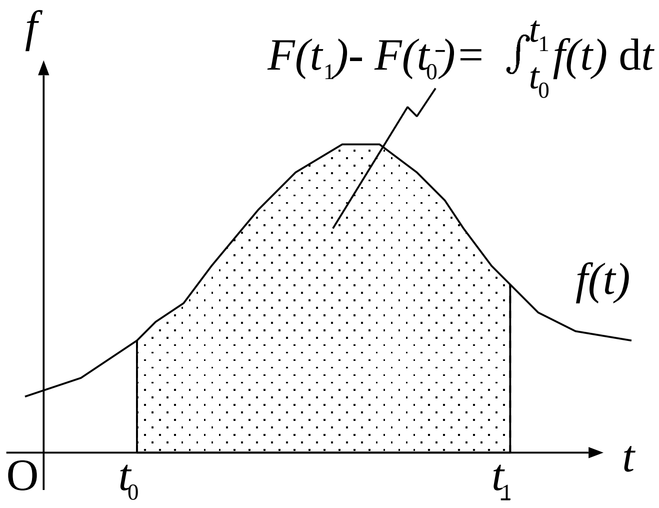
$x(0) = 2$ のような条件を, 59 という．積分定数は, これを用いて決めることができる．

60

61

7.3 速度の定積分は変位

香中 p.64　微分積分 3-1



$$F(t) = \int f(t)\mathrm{d}t + C \qquad (93)$$

のとき,

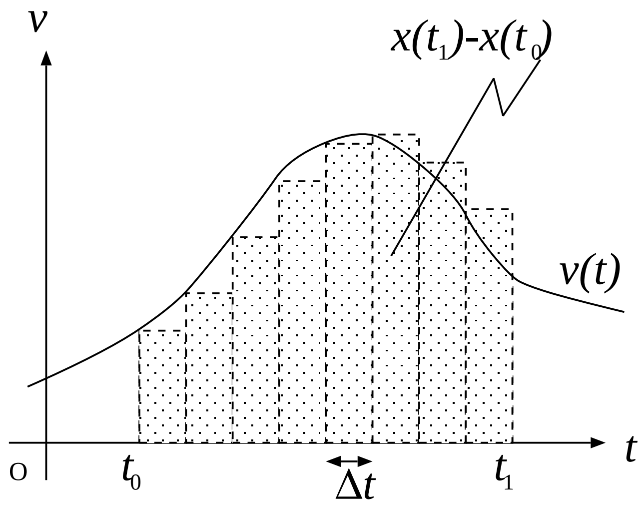
$$F(t_1) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\mathrm{d}t \qquad (94)$$

を定積分という. **これは**, $f(t)$ **のグラフと** $t = t_0$, $t = t_1$ **で囲まれる部分の面積**.

$F(t_1) - F(t_0)$ **のことを**,

$$\boxed{F(t_1) - F(t_0) = [F(t)]_{t_0}^{t_1} = [F(t)]_{t=t_0}^{t=t_1} = F(t)|_{t_0}^{t_1} = F(t)|_{t=t_0}^{t=t_1}} \qquad (95)$$

などと書く流儀があるけど, **ただの好み**.



$t = t_0$ から $t = t_1$ までの x 座標の変位は

$$\boxed{x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v_1(t)\mathrm{d}t} \qquad (96)$$

のように定積分で表わせる.

左辺を t_1 で微分すると, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t_1}(t_1) - 0$. 右辺を t_1 で微分して公式 $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s = f(t)}$ を使うと, $v(t_1)$ であり, 等しい. また, 式 (96) の両辺は $t_1 = t_0$ のとき確かに等しい.

- 定積分には積分定数は出てこない.
- $f(t)$ のグラフが t 軸の下に行くと負の面積になる.

速度から位置を求める 2 つの方法

けっきょくは同じことだけど.

$$x(t) = \int v_1(t)\mathrm{d}t + C \quad \text{不定積分. 積分定数 } C \text{ は初期条件から決定.} \tag{97}$$

$$x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v_1(t)\mathrm{d}t \quad \text{定積分. } t = t_0 \text{ で } x = x(t_0) \text{ が初期条件.} \tag{98}$$

例題 14 の 1 を 2 番目の方法でやってみると,

62

$$= 2 + [\tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{2}\cos(2t)]_0^{2\pi} = \cdots \tag{99}$$

7.4 速度ベクトルの積分は位置ベクトル

時刻 t の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ とすると, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ は

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t), \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} \tag{100}$$

で与えられるのだった. したがって逆に,

$$x(t) = \int v_1(t)\mathrm{d}t + C_1, \tag{101}$$

$$y(t) = \int v_2(t)\mathrm{d}t + C_2, \tag{102}$$

$$z(t) = \int v_3(t)\mathrm{d}t + C_3. \tag{103}$$

C_1, C_2, C_3 は積分定数. これをまとめて, 次のようにかく (ベクトル値関

数の積分).

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = \int \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{C}.} \tag{104}$$

7.5 加速度ベクトルの積分は速度ベクトル

同様に加速度ベクトル $\boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix}$ より,

$$v_1(t) = \int a_1(t)\mathrm{d}t + D_1, \tag{105}$$

$$v_2(t) = \int a_2(t)\mathrm{d}t + D_2, \tag{106}$$

$$v_3(t) = \int a_3(t)\mathrm{d}t + D_3. \tag{107}$$

よって $\boxed{\boldsymbol{v}(t) = \int \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{D}.}$ ($\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$ は積分定数) (108)

7.6 ニュートンの運動方程式 (運動の第 2 法則)

香中 p.30

物体の加速度ベクトル $\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)$ は, 物体の受ける 力 ベクトル $\boldsymbol{F}(t)$ で決まる.

加速度ベクトルの向き: 力 $\boldsymbol{F}(t)$ の向きと同じ.

加速度ベクトルの大きさ: 質量 m に反比例, 力 $\boldsymbol{F}(t)$ の大きさに比例.

63　(109)

これを ニュートンの運動方程式 という.

質量とは

質量の単位: kg (キログラム). 質量はスカラー.

水 1 リットルの質量は 1kg. 1 円玉の質量は 1g=0.001 kg.

基本ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を使って $\boldsymbol{F}(t) = F_1(t)\boldsymbol{i} + F_2(t)\boldsymbol{j} + F_3(t)\boldsymbol{k}$ と書くと

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_1(t), \tag{110}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_2(t), \tag{111}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_3(t). \tag{112}$$

きょうのメッセージ 2

$\boxed{\textbf{位置}\quad \boldsymbol{r}(t)} \;\; \underset{\longleftarrow \text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\longrightarrow}} \;\; \boxed{\textbf{速度}\quad \boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)} \;\; \underset{\longleftarrow \text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\longrightarrow}} \;\; \boxed{\textbf{加速度}\quad \boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)}$

64

成分ごとに微分積分すればおっけー．積分定数 (ベクトル) C, D は初期条件から決まる．

例題 15

質量 $m = 1$ の物体が, 力

$$\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{113}$$

のもとで運動している. 時刻 t における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ とする. 初期条件は

$$\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{114}$$

である. 位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と, 運動の軌跡を求めよう.

66

quiz 10

質量 $m = 3$ **の物体が**, **力**

$$\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} -12\cos(2t) \\ -6\sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{115}$$

を受けて運動している. **初期条件を速度** $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **とする**. **最も遅く動いている時刻とその速さを求めよう**.

67

数検団体受験受付中です!

明日までです. 1-508 **に置いてある郵便振替用紙で郵便局に申し込むだけ. 詳しい案内と過去問** 1-508 **にあります.**