quiz 略解 14

$$
\begin{aligned}
\text{密度} &= \frac{1[\mathrm{g}]}{\pi(1[\mathrm{cm}])^2 1[\mathrm{mm}]} \\
&= \frac{1[\mathrm{g}]}{\pi(1[\mathrm{cm}])^2 1[\mathrm{mm}]} \cdot \frac{1[\mathrm{kg}]}{1000[\mathrm{g}]} \cdot \left(\frac{100[\mathrm{cm}]}{1[\mathrm{m}]}\right)^2 \cdot \frac{1000[\mathrm{mm}]}{1[\mathrm{m}]} \\
&= 3 \times 10^3[\mathrm{kg/m^3}]
\end{aligned}
$$

1 円玉はアルミニウムなので, $2.7 \times 10^3[\mathrm{kg/m^3}]$ くらいのはず. 水の密度より大きいのに水に浮くのはなぜ? 有効数字は 1 桁なので, 2 桁までとって計算し, 最後に四捨五入する.

quiz 略解 15

初速は $V_x = 10[\mathrm{m/s}]$, $V_z = 10\sqrt{3}[\mathrm{m/s}]$. $x(t) = 20$ となる時刻 $t = T$ [s] を求めると, $T = 2[\mathrm{s}]$. $z(2) = -\frac{1}{2}g \cdot 2^2 + 10\sqrt{3} \cdot 2 = 15.0[\mathrm{m}]$ なのでクロスバーの上を越える. 有効数字 2 桁なので, 3 桁までとって計算し, 最後に四捨五入する.

10. 等速円運動と単振動

10.1 単振動

質量 m の物体の, x 軸上の運動

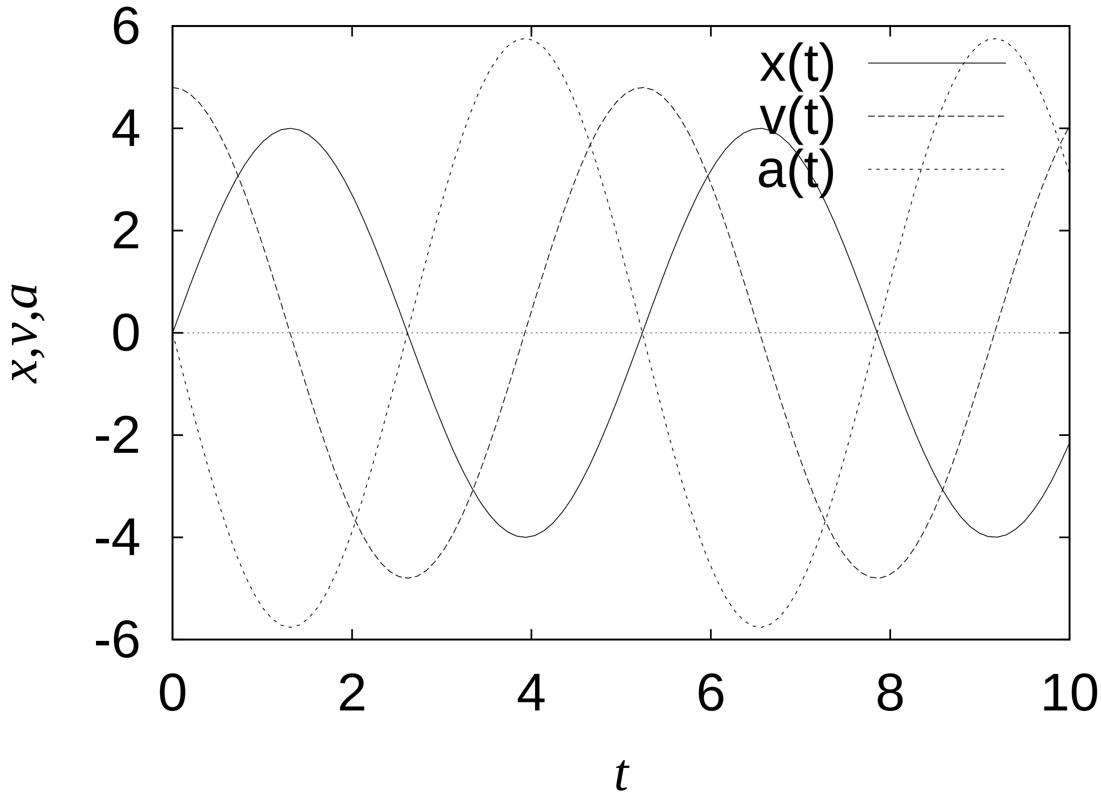
位置
$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t+\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{146}$$

を 単振動, 調和振動 という. ただし, $R(>0), \omega, \phi$ は定数.

速度
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t+\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{147}$$

加速度
$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t+\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2\boldsymbol{r}(t). \tag{148}$$

力
$$\boldsymbol{F}(t) = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -mR\omega^2\cos(\omega t+\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -m\omega^2\boldsymbol{r}(t). \tag{149}$$



アニメ i/V/EZ アプリ

単振動のいろんな量 ちょっとたいへんだけどおぼえよう.

記号	単位	名前	意味 (単振動)
R ω ϕ	[m] [rad/s] [rad]	振幅/半径 角速度 初期位相	原点からの最大距離 単位時間あたりの位相の変化 時刻 $t=0$ における位相
$\omega t+\phi$	[rad]	位相	$\cos$ の引数
$T=\frac{2\pi}{\omega}$ $f=\frac{1}{T}$	[s] [1/s] = [Hz]	周期 振動数	もとの位置, 速度にもどるまでの時間 単位時間に何回振動するかという数

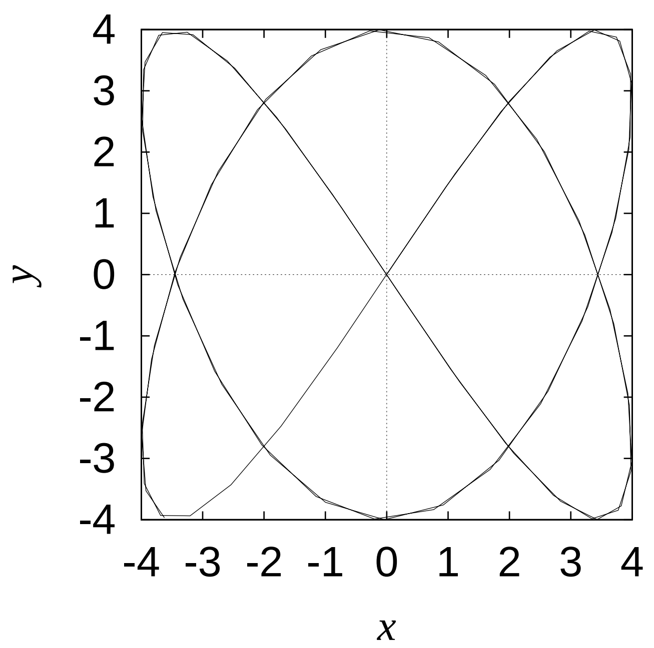
10.2 単振動の組みあわせ—リサジュー運動

x, y 軸方向に, それぞれ単振動している物体を考えよう. 運動

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ R_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{150}$$

を リサジュー運動 という. ただし, $R_i > 0, \omega_i, \phi_i$ は定数.

軌跡の例.



i/V/EZ アプリ

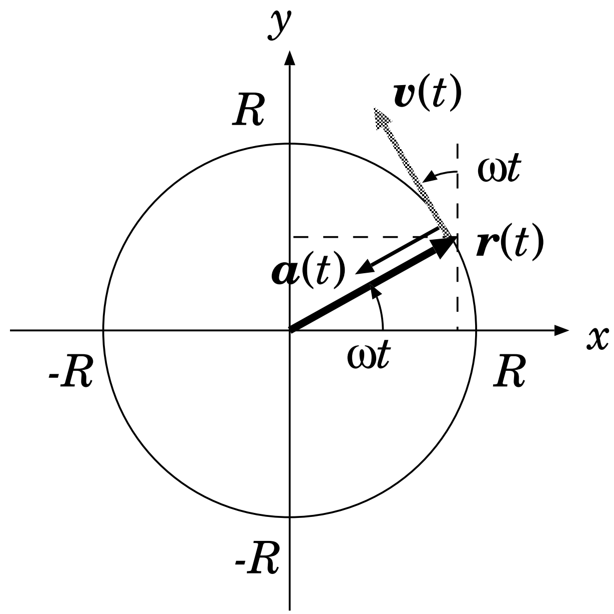
10.3 等速円運動

リサジュー運動の特別な場合 $R = R_1 = R_2, \omega = \omega_1 = \omega_2$,

$\boxed{\phi_1 = 0, \phi_2 = -\frac{1}{2}\pi}$ **を考えよう**. $\cos(\omega t - \frac{1}{2}\pi) = \sin(\omega t)$.

位置

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\boxed{\sin}\omega t \\ 0 \end{pmatrix}.} \qquad (151)$$



軌跡 $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ **より**, xy **平面上の半径** R **の円**.

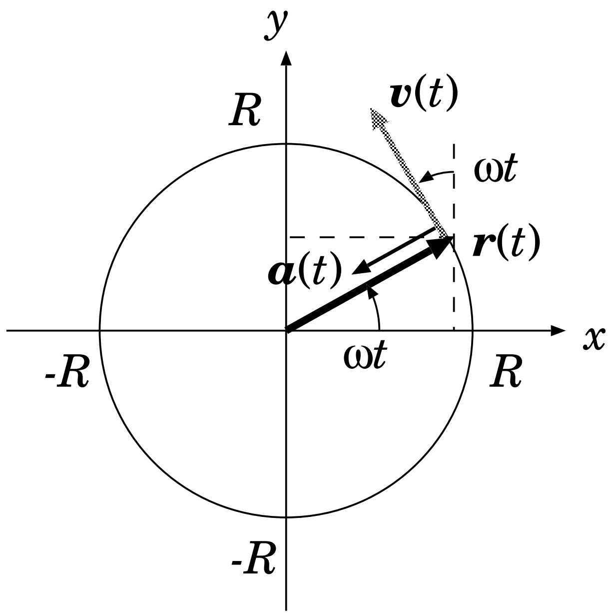
$\boldsymbol{r}(t)$ **の向きは**, x **軸の正の向きから 反時計回りにはかって** ωt **(時刻に比例)**

これは等速円運動. 等速円運動の x **座標, または** y **座標だけを見ると単振動になっている.**

アニメ i/V/EZ アプリ

速度

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ +R\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (152)$$



これは 89 **なぜなら**

速さ $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right| = (R^2\omega^2 \cos^2 \omega t + R^2\omega^2 \sin^2 \omega t)^{\frac{1}{2}} = R\omega.$ (**一定**)

$\omega > 0$ **なら** 90 , $\omega < 0$ **なら** 91 **に運動**.

等速円運動では位置ベクトルと速度ベクトルはいつでも直交. なぜなら代入してみると, 内積 $\boldsymbol{r}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ **だから. あるいは,** $\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}(t) = R^2$

の両辺を微分して (内積の微分のところでやりました)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R^2) \qquad \leadsto 2\boldsymbol{r}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = 0. \tag{153}$$

速度ベクトルを位置ベクトルで表わそう

$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$ とおく ($\boldsymbol{k}$ は z 軸の正の向きの単位ベクトル), このとき,

92　　(外積)　　(154)

と書ける. これは, xy 平面内とは限らない等速円運動でも成立.

Check1: 大きさは $|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}(t)| = |\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}(t)|\sin\frac{\pi}{2} = R\omega$

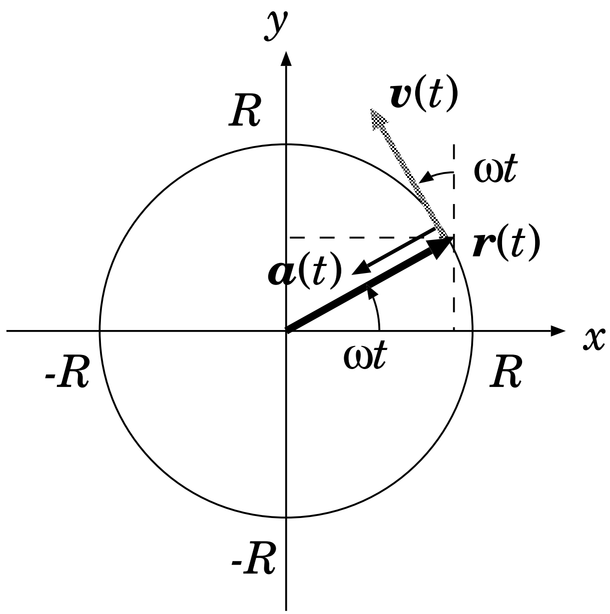
向きは, $\boldsymbol{v}(t)$ は, $\boldsymbol{\omega}$,$\boldsymbol{r}(t)$ の両方に垂直, $\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t)\rangle$ が右手系をなすことから決まる.

Check2:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}R\cos\omega t\\R\sin\omega t\\0\end{pmatrix} = (\text{外積を成分で計算}) = \begin{pmatrix}-R\omega\sin\omega t\\+R\omega\cos\omega t\\0\end{pmatrix} \tag{155}$$

加速度ベクトル

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos\omega t \\ -R\omega^2\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2\boldsymbol{r}(t). \quad (156)$$



加速度の 93 **は一定,** 94 **は一定でない.**

加速度の大きさ $|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)| = R\omega^2$.(**一定**)

向きは $\boldsymbol{r}(t)$ **と平行で逆向き.**

つまり, 加速度は回転の中心を向いている (向心加速度といわれる)

したがって, 速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ **とは直交. これは等速運動すべてに成**

り立つ性質なのだった (夏のプチテスト 3)

$$\boxed{\text{力}}\,\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} -mR\omega^2\sin(\omega t+\phi) \\ +mR\omega^2\cos(\omega t+\phi) \\ 0 \end{pmatrix} = -mR\omega^2\boldsymbol{r}(t), |\boldsymbol{F}| = mR\omega^2$$

ちょっと一般化

$\phi_1 = \phi, \phi_2 = \phi - \frac{1}{2}\pi$. ϕ:新しい定数. いままでは $\phi = 0$ としてた.

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t+\phi) \\ R\sin(\omega t+\phi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega(t+\frac{\phi}{\omega})) \\ R\sin(\omega(t+\frac{\phi}{\omega})) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{157}$$

これも等速円運動.

時刻 $t = 0$ の位置が $\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ でなく, $\begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$ になっただけ.

あるいは, $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる時刻が, $t = 0$ から 95 にずれた

だけ (出発時刻の変更).

等速円運動のいろんな量　ちょっとたいへんだけどおぼえよう.

記号	単位	名前	意味 (単振動)	(等速円運動)
R	[m]	振幅/半径	原点からの最大距離	半径
ω	[rad/s]	角速度	単位時間あたりの位相の変化	単位時間あたりの位相の変化
ϕ	[rad]	初期位相	時刻 $t=0$ における位相	時刻 $t=0$ における位相
$\omega t+\phi$	[rad]	位相	$\cos$ の引数	x 軸からはかった角.
$T=\frac{2\pi}{\omega}$	[s]	周期	もとの位置, 速度にもどるまでの時間	一周するまでの時間
$f=\frac{1}{T}$	[1/s] = [Hz]	振動数	単位時間に何回振動するかという数	単位時間に何周するかという数

位置, 速度, 加速度ベクトルの大きさの間には,

$$|\boldsymbol{r}(t)| = R, \tag{158}$$

$$|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)| = R\omega, \tag{159}$$

$$|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)| = R\omega^2 \left(= \frac{|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)|^2}{R} \right) \tag{160}$$

などの関係があることがわかる. これらはおぼえなくてよい. $\boldsymbol{r}(t)$ の式 (151) だけ書ければ, 微分して全部出せるから.

例題 21

30 秒に 1 回転しているメリーゴーラウンドがある．中心から 10[m] のところで馬に乗っている人は円運動している．この人の角速度を求めよう．速さと加速度の大きさを求めよう．

96

quiz 16

物体 1 が, xy 平面内で, 原点を中心とする等速円運動をしている．半径は 2, 振動数は $\frac{1}{12}$ で, 運動の向きは, (右手系の)z 軸の正の向きから見て

反時計回りである．時刻 t の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ である．

1. 初期位相を，初期条件から定めて，$\boldsymbol{r}(t)$ の式を求めよう．
2. 物体 1 が直線 $y = -x, z = 0$ 上にくる時刻を求めよう．
3. 物体 1 は直線 $y = -x, z = 0$ の，$-2 \leqq x \leqq -1$ の部分を通過するか判定しよう．
4. 物体 2 が

$$\boldsymbol{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{161}$$

にしたがって運動している．物体 1 と物体 2 がもっとも接近する時刻と，そのときの距離を求めよう．

quiz 17

音楽 CD(直径 12cm) は，(全曲の終わりごろには) 毎分 200 回転している．このときの角速度 ω [rad/s] と 振動数 f [Hz] を求めよう．CD の縁

の部分は, どれだけの速さで動いているか, [m/s] と [km/時] で求めよう.

注 **平均 32 倍速の CDROM は, この約 32 倍の速さです.**

上段リサジュー運動, 下段単振動			
hig3.net	i アプリ	V アプリ	EZ アプリ

全体 | 目次 | 前回 | 次回 | 略解