物理数学 II

樋口さぶろお[a]

- 講義の Web page

  http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/
- この紙は, 上の Web page や 1-508 前の引き出しで事前に配っていることもあります.
- 成績は 期末試験 (+ 平常点).
- 毎回の最後に, 理解を確かめる quiz をします. 配った紙に解いて提出してください. フォルダーを学籍番号でグループ分けしています.
- 紙は, チェックした後, 1-508 前の引き出しで返却します. ただし, 数週間以上経過したものは処分することがあります.
- 佐本 n.m, 佐本 p99 などは, 参考文献 (佐川-本間 力学) の参照個所を示します.

[a] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

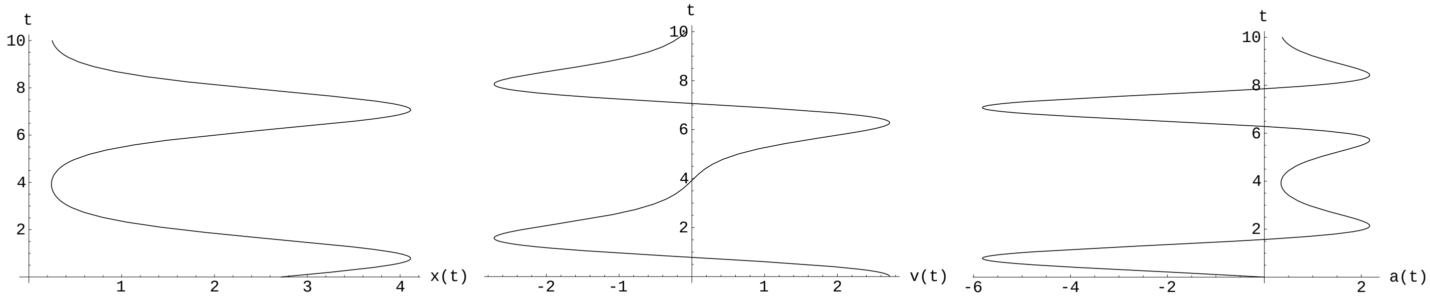
1 ニュートンの運動の 3 法則

'物体の運動の様子 $\vec{r}(t)$ は, 物体に加わる力によってきまる.'

1.1 物理数学 I の復習

t: **時刻** , $\vec{r}(t)$: 3 **次元ベクトル**

$\boxed{\text{位置 } \vec{r}(t)}$ $\underset{\text{積分}\ \longleftarrow}{\overset{\text{微分}\ \longrightarrow}{}}$ $\boxed{\text{速度 } \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)}$ $\underset{\text{積分}\ \longleftarrow}{\overset{\text{微分}\ \longrightarrow}{}}$ $\boxed{\text{加速度 } \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t)}$



$x(t) = \mathrm{e}^{\cos t + \sin t}$

1.2 第一法則 (慣性の法則)

佐本 3.2

物体は, '力' の作用を受けないかぎり, 等速直線運動をする. (特に, 速度 $\vec{0}$ すなわち静止の場合もある)

$$\text{力}\vec{F} = \vec{0} \text{ ならば } \vec{v} = \text{一定}. \qquad \text{すなわち} \boxed{} \tag{1}$$

例: エアホッケーのパック, 電車の中の風船, 無重力状態の宇宙飛行士, 宇宙船.

例でないもの: 地面を転がるボール, 自転車, 自動車.

観測者は地面に固定されているとは限らない.

等速直線運動する電車, 飛行機, エレベータの中でもよい. 慣性系

$\boxed{}$ の中では成り立たない.

当面, このような状況は考えない. '慣性系' のみを考える.

例題 1 板のうえで, ひもで結んだ重りを振り回す. ひもが切れると, 重りはどのような運動をするか.

1.3 第二法則 (ニュートンの運動方程式)

佐本 3.4

力の作用を受ける物体は, ある加速度で運動する.

加速度の向き: 力 $\vec{F}$ の向きに平行.

加速度の大きさ: 質量 m に反比例, 力 $\vec{F}$ の大きさに比例.

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} \quad \text{すなわち} \quad \boxed{\phantom{m\vec{a} = \vec{F}}} \tag{2}$$

成分で書く. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$. ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトル.)

$$m\frac{d^2x}{dt^2}(t) = F_x(t), \tag{3}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}(t) = F_y(t), \tag{4}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}(t) = F_z(t). \tag{5}$$

例題 2 質量 m の物体に重力 $\vec{F} = -mg\vec{k}$ がはたらいている. このとき, 物体の運動は,

$$\vec{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\vec{k} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0. \tag{6}$$

と書ける. これが第二法則を満たすことを示せ.

質量とは

質量の単位: kg (**キログラム**). **水** 1 **リットルの質量は** 1kg.

(**慣性**) **質量**:

重さ:

(**慣性**) **質量** $\neq$ **重さ**

重力のないところでの, 質量の測定方法: **同じ力を加えて, 生じる加速度を比べる**.

力とは

ベクトル量. **重ねあわせが成り立つ**.

力の単位 N(**ニュートン**)

1kg **の物体にはたらくと**, 1m/s^2 **の加速度を与える力を** 1N **という**. 1N=1 m kg/s^2.

地球表面で質量 1kg **の物体にはたらく重力**: $1\ \mathrm{kg} \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} = 9.8\ \mathrm{N}$=1kg **重**.

単位系

MKSA 単位系: 長さ m (Meter), 質量 kg (Kilogram), 時間 s(Second=秒), 電流 A(Ampère=アンペア) で測る単位系.

他の物理量は, これらの組合わせで表す (組立単位). 例: 1N=1kg m/s^2.

次元解析 佐本 4.5

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

で

[左辺]=[質量] × [加速度] = kg m/s^2 = [質量] × [長さ] / [時間]^2

[右辺]=[力] = N = kg m/s^2 = [質量] × [長さ] / [時間]^2

1.4 第三法則 (作用・反作用の法則)

佐本 3.5

物体 1 が物体 2 に力 $\vec{F}_{12}$ を及ぼすとき, 物体 2 も物体 1 に力 $\vec{F}_{21}$ を及ぼす. その向きは反対, 大きさは同じ.

$$\boxed{\phantom{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}} \tag{7}$$

例: 銃の発射の反動. 地球とりんご (重力). 下敷と髪の毛 (電気力).

例題 3 体重 $40\ kg$ と $60\ kg$ の 2 人の宇宙飛行士が, 無重力状態で手をつないでいた. $40\ kg$ の宇宙飛行士が, $60kg$ の宇宙飛行士を, $2\ N$ の力で 3 秒間おした. 3 秒後の 2 人の宇宙飛行士はそれぞれ, どれだけの速さでどちら方向に進んでいるか.

運動量

運動量ベクトル=質量 $\times$ **速度ベクトル**.

単位 kg·m/s

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{8}$$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$ **なので, ニュートンの運動方程式は**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{9}$$

とも書ける.

運動量の保存

質量 m_1, m_2 **の** 2 **つの物質が, 力** F_{12}, F_{21} **を及ぼしあっているとする. 他のものは力を及ぼしていない** (**外力はない**).

このとき, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ **は一定**. $\cdots$ **運動量の保存**

なぜなら,

また, $\boxed{\text{重心ベクトル}}$ $\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$ **は等速直線運動する. なぜなら**

$$\boxed{} \tag{14}$$

1.5 きょうの quiz

1. 物理数学 I への感想, 物理数学 II への希望, きょうの授業に対する感想 (早すぎた, 遅すぎた, まだ習っていないことを習っているかのように扱っている, 他の授業と記号が違う, プロジェクター/黒板が見にくい, など) を何でも書いてください.
2. 最初に静止していた質量 10kg の物体に, 大きさと向きの一定の力を 1 分間加え続けたところ, 速さが 0.6m/s となった. この力の大きさを求めよ.
3. 質量 2 kg の物体を, 大きさ 2 N の力で一方向に押すとき, 物体の加速度はどれだけか. 同じ力で押し続けたとき, 10 秒後の速さと, 10 秒間に進んだ距離を求めよ.
4. 質量 m[kg] の物体が, $x(t) = \mathrm{e}^{\cos t + \sin t}$[m], $y(t) = 0, z(t) = 0$ の運動をしている. 時刻 t にこの物体に働いている力 $\vec{F}$ [N] を求めよ.

1.6 前回の quiz の解答例

答案は 1-508 前の引き出しで返却中 (添削はできません).

1. 略. 青いチョークは使うのやめます.
2. 力は一定なので, $m\vec{a} = \vec{F}$ より, $\vec{a} =$ 一定 の定加速度運動. 加速度 $\vec{a}$ と力 $\vec{F}$ の大きさは,

$$|\vec{a}| = (0.6 - 0)\mathrm{m/s}/60\mathrm{s} = 0.01\mathrm{m/s}^2, \tag{15}$$

$$|\vec{F}| = 0.01\mathrm{m/s}^2 \times 10\mathrm{kg} = 0.1\mathrm{kg\ m/s}^2 = 0.1\mathrm{N} \tag{16}$$

3. 運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$ より, 加速度は,

$$2\mathrm{N}/2\mathrm{kg} = 2\mathrm{kg\ m/s}^2/2\mathrm{kg} = 1\mathrm{m/s}^2. \tag{17}$$

定加速度運動なので, $t = 10\mathrm{s}$ での速さ $v(t)$ と位置 $r(t)$ は,

$$v(t) = \int_0^t a\ \mathrm{d}t' + v(0) = at = 1\mathrm{m/s}^2 \times 10\mathrm{s} = 10\mathrm{m/s}, \tag{18}$$

$$r(t) = \int_0^t at'\ \mathrm{d}t' + r(0) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\mathrm{m/s}^2 \times (10\mathrm{s})^2 = 50\mathrm{m}. \tag{19}$$

4. 加速度ベクトルを求めると, $\vec{a} = (x''(t), y''(t), z''(t)) = \left((1 - \cos t - \sin t - \sin 2t)\mathrm{e}^{\cos t + \sin t}, 0, 0\right).$
運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$ より, 力 $\vec{F}$ は,

$$\vec{F} = \left(m(1 - \cos t - \sin t - \sin 2t)\mathrm{e}^{\cos t + \sin t}, 0, 0\right). \tag{20}$$

2 運動方程式

2.1 運動の第二法則

佐本 3.4

時刻 t **での位置** $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. **力** $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, **質量** m.

ニュートンの運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \vec{F}, \tag{21}$$

成分で書くと

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_x, \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_y, \\ m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_z. \end{cases} \tag{22}$$

注: $\vec{F}$ **は時間** t **や位置** $x(t)$ **の関数かも**.

しばらく, 運動が x 方向に限られた場合を考えよう. $x(t)$ だけを考えよう.

2.2 力を受けない場合 ($\approx$ 第一法則)

$$F_x = 0 \rightsquigarrow m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0. \tag{23}$$

このような方程式 (未知関数 $x(t)$ に関する方程式で, 微分を含んでいるもの) を 微分方程式 という.

$x(t)$ を求める (微分を含まない式にする) ことを, 微分方程式を解く (微分方程式を積分する) という.

解き方の例

(23) の両辺を t で (不定) 積分.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C_1 \qquad (C_1 = C' - C : \text{積分定数}) \tag{25}$$

もういちど両辺を t で積分.

$$x(t) = C_1 t + C_2 \qquad (C_2 =: \text{積分定数}) \tag{27}$$

$\boxed{\text{等速 (直線) 運動}}$!

3 次元の場合

$F_x = F_y = F_z = 0 \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}rt^2}(t) = 0. \end{cases} \tag{28}$$

同様に,

$$\begin{cases} x(t) = C_1 t + C_2, \\ y(t) = C_3 t + C_4, \\ z(t) = C_5 t + C_6 \end{cases} \quad \textbf{別の書き方} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \\ C_6 \end{pmatrix} \quad \textbf{または} \quad \vec{r}(t) = \vec{v}t + \vec{r}_0 \tag{29}$$

C_i **は積分定数.**

$\boxed{\text{等速直線運動}}$!

引き続き, **運動が** x **方向に限られた場合を考えよう**. $x(t)$ **だけを考えよう**.

2.3 一定の力を受ける場合

佐本 2.2

$F_x = f($**定数**$)$. **時間によらない**.

運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = f(\text{定数}). \tag{30}$$

解き方の例

(23) **の両辺を** t **で積分**.

両辺をもういちど t **で積分**

等加速度運動!

t **で微分して**, **もとに戻るか** check **しよう**!

例題 4 (落体の運動) 質量 m の物体が鉛直方向にのみ運動している．鉛直上向きに x 軸をとる．重力 mg が下向きに働いている．

時刻 $t=0$ で，$x=0$ の位置から，鉛直上向きに速さ v_0 で物体を打ち出したときの運動を求めよ．

解答例

答えは $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t.$ (35)

積分定数と初期条件

ニュートンの微分方程式を積分すると，2 個の 積分定数 が現れる．これは，微分方程式が 2 階であるためである．これら 2 個の積分定数は，

$$x(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 \tag{36}$$

のような，2 個の 初期条件 から決定される (例えば，).

初期条件が与えられていないと，運動はひとつには定まらない (積分定数が残る)．

2.4 時間的に変化する力

例題 5 質量 m の物体が，力 $F_x(t) = f\mathrm{e}^{-t/\tau}$ を受けて運動している $(f, \tau > 0$, 定数$)$. 時刻 $t = 0$ で $x = 0$ に静止していた物体の運動を求めよ．とくに時刻 $t \to \infty$ での速度を求めよ．

$$x(t) = \boxed{} \tag{40}$$

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \boxed{} \tag{41}$$

次元解析

この答えは, 次元解析 から予測可能 佐本 4.5

答えは次のもので書けるはず.

		単位	次元
力	f	kg m/s^2	$\mathrm{M}^1\mathrm{L}^1\mathrm{T}^{-2}$
質量	m	kg	$\mathrm{M}^1\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0$
定数	τ	s	$\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^1$

τ は時間の次元を持つ. なぜなら, $\boxed{}$.

$\mathrm{e}^{-t/\tau}$ は $\boxed{}$

答えを $v(+\infty)$ [m/s] とすると, 次元は $\mathrm{M}^0\mathrm{L}^1\mathrm{T}^{-1}$

$$v(+\infty) = f^a m^b \tau^c \times \text{無次元の数} \tag{42}$$

とすると,

$$(\mathrm{M}^0\mathrm{L}^1\mathrm{T}^{-1}) = (\mathrm{M}^1\mathrm{L}^1\mathrm{T}^{-2})^a(\mathrm{M}^1\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0)^b(\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^1)^c \tag{43}$$

すると,

$$0 = a + b, \quad 1 = a, \quad -1 = -2a + c. \tag{44}$$

よって, $a = 1, b = -1, c = 1$.

$$v(+\infty) = f^1 m^{-1} \tau^1 \times \text{無次元の数} \tag{45}$$

例題 6 質量 $1\ [kg]$ の物体が, 時刻 $t=0\ [s]$ で $x=0$ に静止していた.

時刻 $t=0[s]$ から $t=10\ [s]$ まで, x 軸の正の方向に $2\ [N]$ の力を受け, $t=10\ [s]$ から $t=20[s]$ まで x 軸の負の方向に $2\ [N]$ の力を受けた. $0<t<20$ での物体の位置 $x(t)\ [m]$ を求めよ.

2.5 微分方程式

今日出てきた微分方程式はいちばん簡単なタイプ. (2 階常微分方程式の中の特別に簡単なもの)

数理情報学科の数学の先生たちの多くは微分方程式の専門家.

他の科目との関係

- 数値計算法 (2), 計算科学 (3): 微分方程式を計算機で数値的に解く.
- 数理モデル基礎 (2), 現象の数学 (3), 非線形数理 (3): より進んだ微分方程式の扱い.
- 偏微分方程式 (3), 応用力学系 (4): より進んだ微分方程式の数学的に厳密な取り扱い.
- 力学 (2), 電磁気学 (3): 微分方程式が使われる物理.

2.6 きょうの quiz

1. 質量 m の物体が鉛直方向にのみ運動している．鉛直上向きに x 軸をとる．重力 mg が下向きに働いている．

   時刻 $t=0$ で，$x=0$ の位置から (適当な速度で) 打ち出された物体が，時刻 $t=\tau$ に，$x=g\tau^2$ に到達したという．

   任意の時刻 t での物体の位置 $x(t)$ を，g, τ を使って表せ．

2. 質量 m の，時刻 $t=0$ で $x=0$ に静止していた物体が，$t>0$ で，力 $F_x(t)=\frac{f\tau^2}{(t+\tau)^2}$ を受けて運動する ($f, \tau>0$，定数)．

   $t>0$ での物体の運動を求めよ．

   [暇と興味のあるひとは：時刻 $t\to\infty$ で，$x(t)$，$\frac{dx}{dt}(t)$ はどうなるか．]

2.7 前回の quiz の解答例

1. 運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg. \tag{51}$$

2 回積分すると,

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2. \quad (C_1, C_2\text{は積分定数}) \tag{52}$$

初期条件より

$$0 = x(0) = -\frac{1}{2}g\cdot 0^2 + C_1\cdot 0 + C_2, \tag{53}$$

$$g\tau^2 = x(\tau) = -\frac{1}{2}g\cdot\tau^2 + C_1\cdot\tau + C_2 \tag{54}$$

より, $C_1 = \frac{3}{2}g\tau, C_2 = 0$. よって,

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{3}{2}g\tau t. \tag{55}$$

(運動方程式と初期条件をみたすことを check しよう).

2. 運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{f\tau^2}{(t+\tau)^2}. \tag{56}$$

$(-\frac{1}{t+1})' = \frac{1}{(t+1)^2}$ に注意して,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{f\tau^2}{m}\frac{1}{(t+\tau)} + C_1. \tag{57}$$

$(\log(t+1))' = \frac{1}{t+1}$ に注意して,

$$x(t) = -\frac{f\tau^2}{m}\log(t+\tau) + C_1 t + C_2. \tag{58}$$

初期条件より,

$$0 = x(0) = -\frac{f\tau^2}{m}\log(0+\tau) + C_1\cdot 0 + C_2. \tag{59}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -\frac{f\tau^2}{m}\frac{1}{(0+\tau)} + C_1. \tag{60}$$

よって, $C_2 = \frac{f\tau^2}{m}\log\tau, C_1 = \frac{f\tau}{m}$. けっきょく

$$x(t) = -\frac{f\tau^2}{m}\log\frac{t+\tau}{\tau} + \frac{f\tau}{m}t. \tag{61}$$

[いまは分からないかもしれない注: 途中で出てくる $\log$ (時間) のような形は本当はおかしい. だって, $\log(24$ 分$)$ っていくつ?]

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{f\tau}{m}. \tag{62}$$

2.8 微分方程式を解く練習

与えられた初期条件のもとで, **微分方程式を解いて**, $x(t)$ **を求めよ**.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 1 - 2t, \quad x(0) = 0, \tag{63}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \omega\cos(\omega t), \quad x(0) = 1, \quad (\omega(\text{オメガ}) > 0 \text{ は定数. よく角振動数を表すのに使われる.}) \tag{64}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 2 - \mathrm{e}^{-3t}, \quad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{65}$$

3 放物運動

佐本 2.4

3.1 力の働かないときの 3 次元の運動

時刻 t での位置 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. 力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, 質量 m. ニュートンの運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \vec{F}, \quad \text{成分で書くと} \begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_x, \\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_y, \\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_z. \end{cases} \tag{66}$$

$$\text{力が働かない} \iff \vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0,0,0) \rightsquigarrow \begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0. \end{cases} \tag{67}$$

成分ごとに 2 回積分して,

$$\begin{cases} x(t) = v_{x0}t + x_0, \\ y(t) = v_{y0}t + y_0, \\ z(t) = v_{z0}t + z_0, \end{cases} \quad \text{別の書き方} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \boxed{} \tag{68}$$

等速直線運動 $v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0, z_0$ は積分定数.

$\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ は $\boxed{}$ $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ は $\boxed{}$

3.2 重力のもとでの 3 次元の運動

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -mg) \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = v_{x0}t + x_0, \\ y(t) = v_{y0}t + y_0, \\ z(t) = \boxed{}. \end{cases} \tag{69}$$

積分定数 $v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0, z_0$. 2 **階** $\times$ 3 **次元** $=$ 6 **個**.

座標系の原点を変え, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ **としても一般性を失わない**. ($x(t) - x_0$ **を** $x_{\mathrm{new}}(t)$ **と思い直した**).

座標系を回して, $v_{y0} = 0$ **としても一般性を失わない**.

$$y(t) = 0, \tag{70}$$

$$x(t) = v_{x0}t, \tag{71}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t. \tag{72}$$

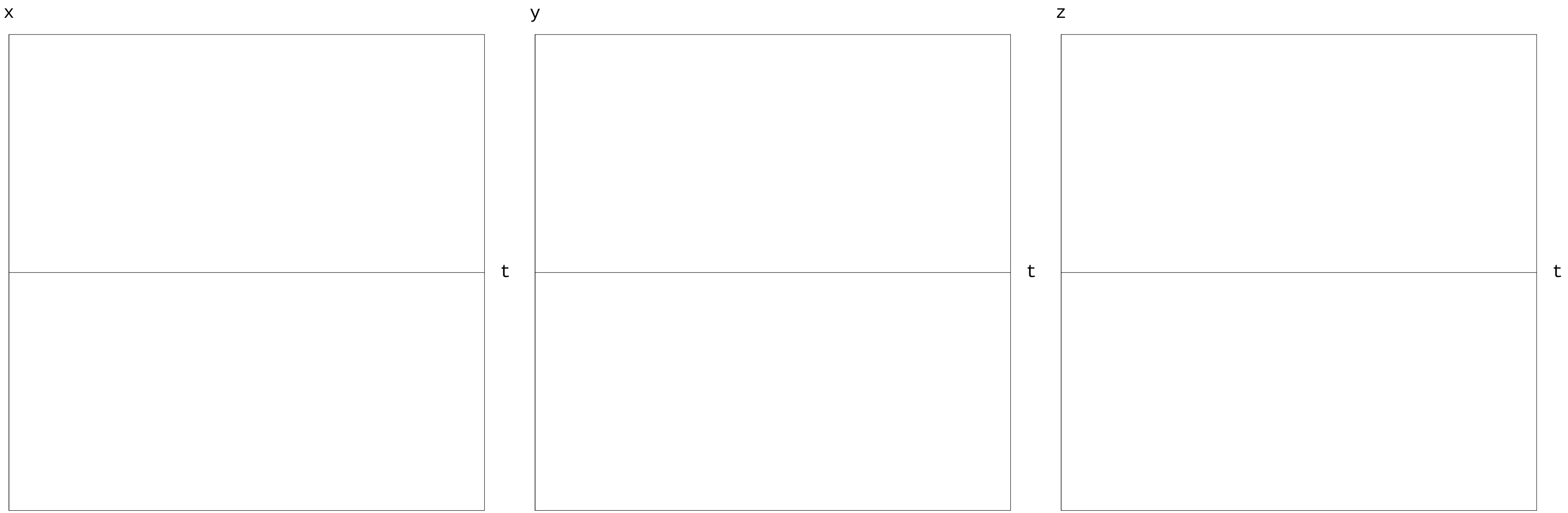
最高点 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ **となる時刻** $t = T_1$ **は**, $-gT_1 + v_{z0} = 0 \rightsquigarrow T_1 = v_{z0}/g$.

最高点の位置は, $\boxed{}$.

到達距離 **ふたたび** $z(t) = 0$ **となる時刻** $t = T_2$ **は**, $-\frac{1}{2}gT_2^2 + v_{z0}T_2 = 0 \rightsquigarrow T_2 = 2v_{z0}/g$.

到達距離は $\boxed{}$.

運動の様子



例題 7 地上から, 角度 θ の方向に初速の大きさ v_0 でボールを投げたとき, その最高点の高さと落下点までの距離を求めよ. ただし, 重力加速度を g とする.

初速の大きさ v_0 が一定のとき, もっとも遠くまでボールが届くのは, θ がどのような値のときか.

例題 8 地上から, 角度 $\pi/6$ の方向に初速の大きさ v_0 でボールを投げる. 水平に a だけはなれた位置にある, 高さ h の壁を越えるためには, 初速の大きさ v_0 はどれだけ以上である必要があるか. ただし, 重力加速度を g とする. 壁の高さは, $h < a/\sqrt{3}$ を満たす.

(x, z) 空間での運動の軌跡を考えよう.

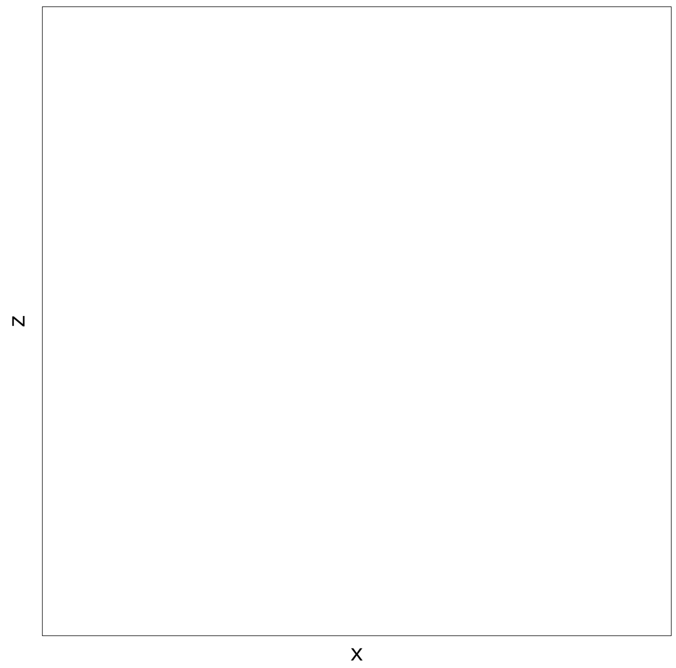
(78),(79) から t を消去.

$$z(t) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x(t)}{v_{x0}} \right)^2 + v_{z0} \left(\frac{x(t)}{v_{x0}} \right). \tag{73}$$

平方完成 $\rightsquigarrow$

$$z(t) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{74}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{x0}^2} (x(t) - x_{\mathrm{m}})^2 + z_{\mathrm{m}} \tag{75}$$



放物線!

最高点 $(x_{\mathrm{m}}, z_{\mathrm{m}}) = (\frac{v_{x0} v_{z0}}{g}, \frac{v_{z0}^2}{2g})$.

落下点 $(2x_{\mathrm{m}}, 0)$.

3.3 重力のもとでの 3 次元の運動

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -mg) \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = v_{x0}t + x_0, \\ y(t) = v_{y0}t + y_0, \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t + z_0. \end{cases} \tag{76}$$

積分定数 $v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0, z_0$. 2 **階** $\times$ 3 **次元** $=$ 6 **個**.

座標系の原点を変え, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ **としても一般性を失わない**. $(x(t) - x_0$ **を** $x_{\mathrm{new}}(t)$ **と思い直した**).

座標系を回して, $v_{y0} = 0$ **としても一般性を失わない**.

$$y(t) = 0, \tag{77}$$

$$x(t) = v_{x0}t, \tag{78}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t. \tag{79}$$

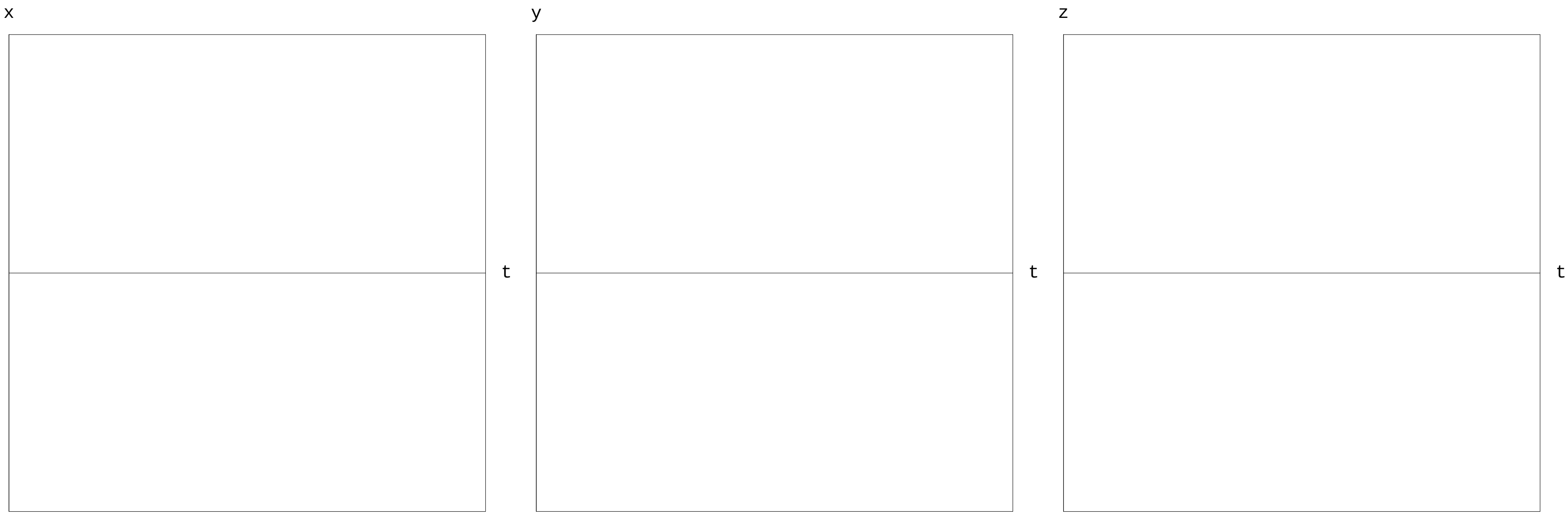
最高点 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ **となる時刻** $t = T_1$ **は**, $-gT_1 + v_{z0} = 0 \rightsquigarrow T_1 = v_{z0}/g$.

最高点の位置は, $x(T_1) = v_{x0}v_{z0}/g, z(T_1) = \frac{v_{z0}^2}{2g}$.

到達距離 **ふたたび** $z(t) = 0$ **となる時刻** $t = T_2$ **は**, $-\frac{1}{2}gT_2^2 + v_{z0}T_2 = 0 \rightsquigarrow T_2 = 2v_{z0}/g$.

到達距離は $\boxed{}$.

運動の様子



例題 9 地上から，角度 θ の方向に初速の大きさ v_0 でボールを投げたとき，その最高点の高さと落下点までの距離を求めよ．ただし，重力加速度を g とする．

初速の大きさ v_0 が一定のとき，もっとも遠くまでボールが届くのは，θ がどのような値のときか．

例題 10 地上から，a 離れた壁に向けて初速の大きさ v_0 でボールを投げる．角度 θ の方向に投げたときに，ボールがあたる点の高さを求めよ．ただし，重力加速度を g とする．

例題 11 地上から，角度 $\pi/6$ の方向に初速の大きさ v_0 でボールを投げる．水平に a だけはなれた位置にある，高さ h の壁を越えるためには，初速の大きさ v_0 はどれだけ以上である必要があるか．ただし，重力加速度を g とする．壁の高さは，$h < a/\sqrt{3}$ を満たす．

例題 12 (難) 地上のある点から初速の大きさ v_0 でボールを投げる．距離 a だけ離れた，高さ h の壁を越えさせるためには，v_0 は最小でもどれだけである必要があるか．

例題 13 (難) 高さ h の塔の上から，初速の大きさ v_0 でボールを投げる．地面のどの範囲に届くか．

(x, z) 空間での運動の軌跡を考えよう.

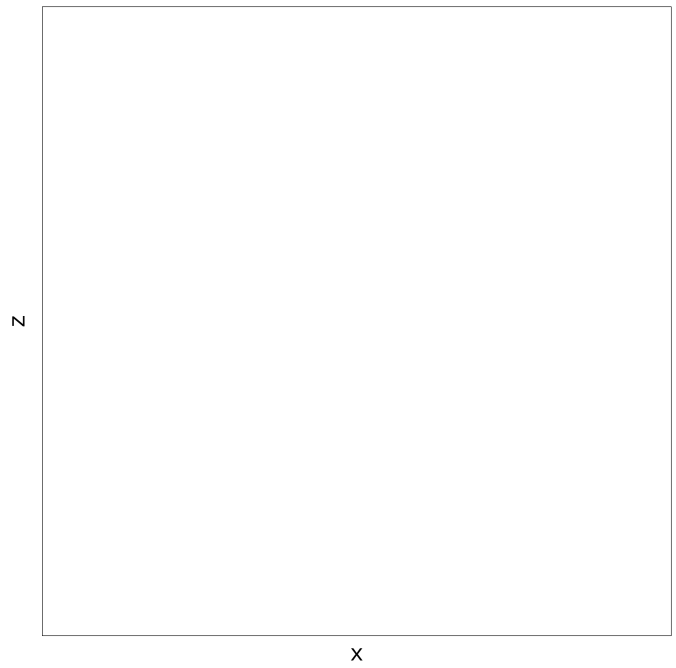
(78),(79) から t を消去.

$$z(t) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x(t)}{v_{x0}}\right)^2 + v_{z0}\left(\frac{x(t)}{v_{x0}}\right). \tag{80}$$

平方完成 $\rightsquigarrow$

$$z(t) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{81}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x0}^2}(x(t) - x_{\mathrm{m}})^2 + z_{\mathrm{m}} \tag{82}$$



放物線!

最高点 $(x_{\mathrm{m}}, z_{\mathrm{m}}) = (\frac{v_{x0}v_{z0}}{g}, \frac{v_{z0}^2}{2g})$.

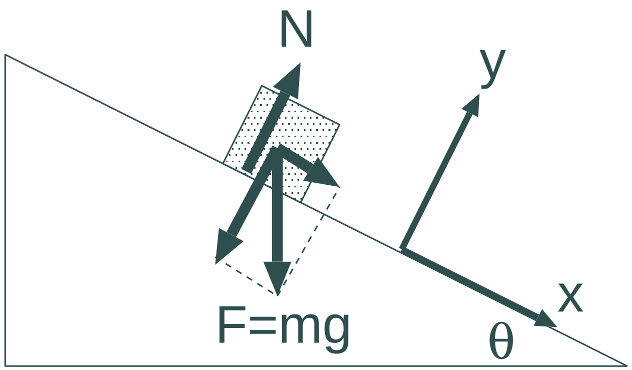
落下点 $(2x_{\mathrm{m}}, 0)$.

4 斜面に沿う運動

佐本 4.1

水平から θ だけ傾いたなめらかな斜面をすべる物体 (質量 m).

運動方程式 (はたらく力は, $\vec{F}$: 重力, $\vec{N}$: 垂直抗力.)



$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} + \vec{N}. \tag{83}$$

成分で書くと,

$$\boxed{} \tag{84}$$

$$\boxed{}. \tag{85}$$

$\rightsquigarrow$

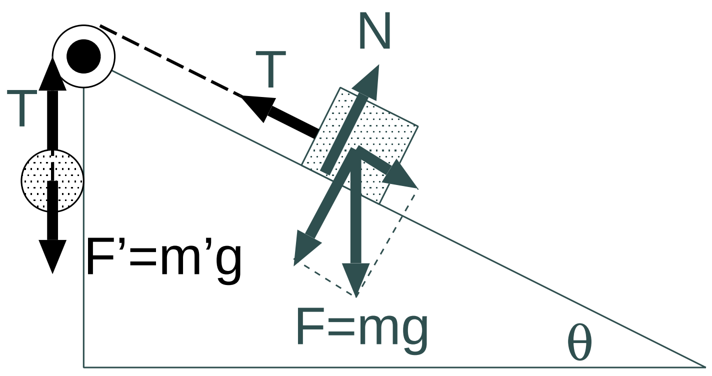
$$x(t) =\frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2 + v_{x0}t + x_0, \tag{86}$$

$$y(t) =v_{y0} + y_0 = 0. \tag{87}$$

垂直抗力の大きさは,

$$N = mg\cos\theta \tag{88}$$

例題 14 図の状況で, 伸び縮みしないひもでつながれた 2 つの物体 (質量 m, m') の運動を求めよ. ($Hint.$ ひもの張力を T とおけ). 佐本 4.2



小テストのお知らせ

物理数学 II の小テストを, 11 月 12 日, 12 月 3 日 の 2 回行ないます.

最終的な成績は,

$$(\text{出席}+\text{quiz}):\text{小テスト }1:\text{小テスト }2:\text{期末試験} = 10:20:20:50 \tag{89}$$

で決定します.

11 月 12 日の試験の範囲は, 運動方程式, 落体の運動, 放物運動 です.

3.4 例題の略解

例題 10

ボールを原点から $t=0$ に投げるとする．壁の方向を x 軸にとると，壁にボールが当たる時刻 $t=T_1$ は，

$$x(T_1)=v_{0x}\times T_1=(v_0\cos\theta)\times T_1=a \text{ すなわち } T_1=a/(v_0\cos\theta). \tag{90}$$

時刻 $t=T_1$ でのボールの高さは，

$$z(T_1)=-\frac{1}{2}gT_1^2+v_{0y}T_1=a\tan\theta-\frac{1}{2}g\left(\frac{a}{v_0\cos\theta}\right)^2. \tag{91}$$

例題 11

上の例題で，$\theta=\pi/6$ としたときに，

$$z(T_1)=a\tan\theta-\frac{1}{2}g\left(\frac{a}{v_0\cos\theta}\right)^2>h \tag{92}$$

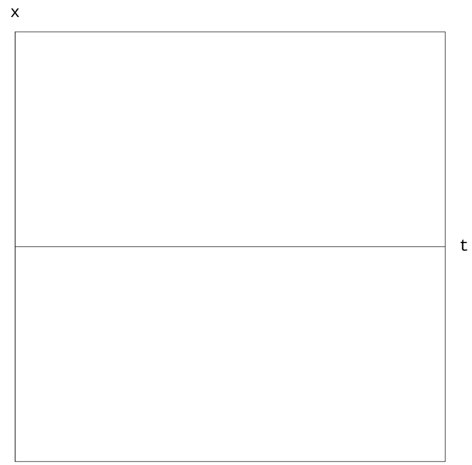
であればよいから，不等式を v_0 について解いて，

$$v_0>\sqrt{\frac{2ga}{\sqrt{3}-\frac{3h}{a}}} \tag{93}$$

5 空気抵抗のある場合の運動

5.1 空気抵抗のみがある場合

物体の 空気抵抗 は, 向きは速度 $\vec{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ **と逆, 大きさは速度** $\vec{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ **に比例.**



空気抵抗の力　$\vec{F}=-k\vec{v}(t).$　k **は正の比例定数** (94)

空気抵抗だけを受ける, 1 次元の運動を考えよう. (例えば, 宇宙船内で物を投げたときの 1 次元の運動). 質量を m **とすると運動方程式は,**

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{95}$$

$v(t)=v_x(t)$ **に対して,**

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)=-\frac{k}{m}v(t). \tag{96}$$

[**注: 運動方程式に,** $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ **のみで** $x(t)$ **が入ってなければ,** $v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **とおいて, まず** $v(t)$ **を求める.**]

微分すると自分の $-k/m$ **倍になる関数って何?**

(97)

積分して (98)

5.2 (変数分離型) 微分方程式

次の性質を満たす関数 $x(t)$ **を求めよ**.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t), \qquad \textbf{初期条件}\ x(0) = 4. \tag{99}$$

$x(t) = 4\mathrm{e}^{2t}$.

この解き方を $\boxed{\textbf{変数分離法}}$ **といい**,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)g(t) \tag{100}$$

のような形 ($\boxed{\textbf{変数分離形}}$) **のときに使える**.

例題 15 次の微分方程式を，それぞれ，初期条件のもとで解け．

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x, \quad x(0) = 2. \tag{101}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2x, \quad x(0) = 2. \tag{102}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x^2, \quad x(0) = 2. \tag{103}$$

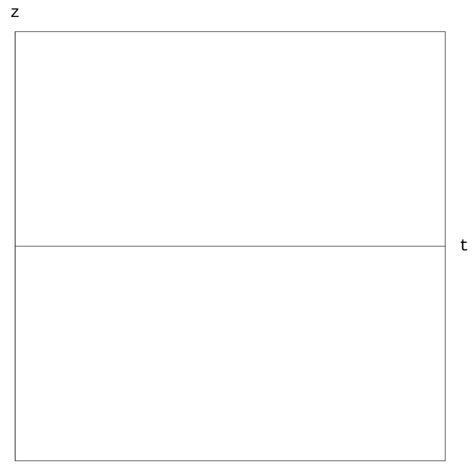
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -1 - x, \quad x(0) = 2. \tag{104}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = 1, \quad x(0) = 2. \tag{105}$$

5.3 空気抵抗のある場合の落下運動

鉛直上向きに z 軸をとる．質量 m．運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg - k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \tag{106}$$



あるいは，$v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ に対して，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -g - \frac{k}{m}v(t). \tag{107}$$

こ
れを解こう．

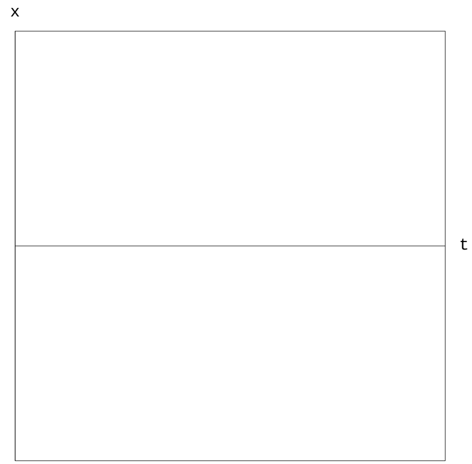
$$v(t) = \boxed{\qquad\qquad} \tag{108}$$

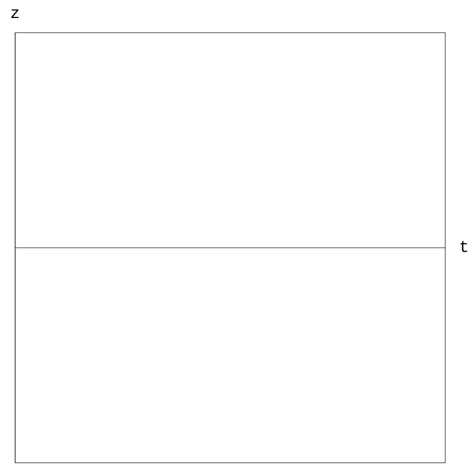
$t \to \infty$ で $v(t) \to -mg/k$．これを**終端速度**という．$0(= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)) = -g - \frac{k}{m}v(t)$ を解いても得られる．

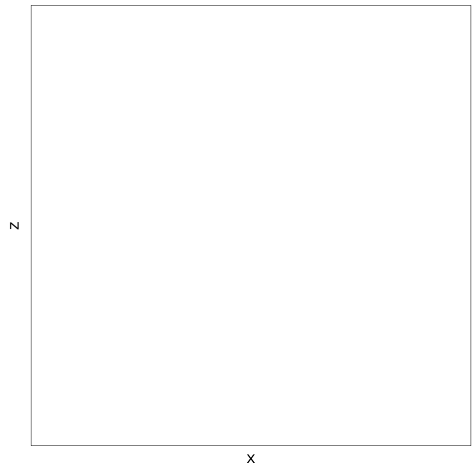
$$z(t) = C_2 - \frac{mg}{k}t + C_1 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{109}$$

例題 16 質量 m の物体を, 時刻 $t=0$ に, 位置 z_0 から, 鉛直上方に初速 v_0 で打ち出した. 物体には, 重力 (重力加速度は v) と, 速度に比例する空気抵抗 (比例定数 k) がはたらいている. 物体の運動を求めよ.

5.4 空気抵抗のある場合の放物運動







鉛直上向きに z 軸, 水平方向に x 軸をとる. 質量 m. z 軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_z$ とかくと, 運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\vec{e}_z - k\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t) \tag{110}$$

成分で書いて,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t), \tag{111}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg - k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \tag{112}$$

あるいは,

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(t) = -\,kv_x(t), \tag{113}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}(t) = -\,mg - kv_z(t). \tag{114}$$

各々解けばよい.

$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}, \tag{115}$$

$$z(t) = C_3 - \frac{mg}{k}t + C_4\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{116}$$

5.5 例題の略解

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x, \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = C\mathrm{e}^{t}, \quad C = 2. \tag{117}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2x, \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = C\mathrm{e}^{-2t}, \quad C = 2. \tag{118}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x^2, \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = \frac{1}{x+C}, \quad C = 1/2. \tag{119}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -1 - x, \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = -1 + C\mathrm{e}^{-t}, \quad C = 3. \tag{120}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = 1, \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = \tfrac{1}{2} + C\mathrm{e}^{-2t}, \quad C = \tfrac{3}{2}. \tag{121}$$

5.6 重力と空気抵抗のもとでの運動

質量 m の物体を考える. 鉛直上向きに z 軸, 水平方向に x 軸をとる.

z 軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_z$ とかくと, 運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\vec{e}_z - k\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t) \tag{122}$$

成分で書いて,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t), \tag{123}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg - k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \tag{124}$$

あるいは,

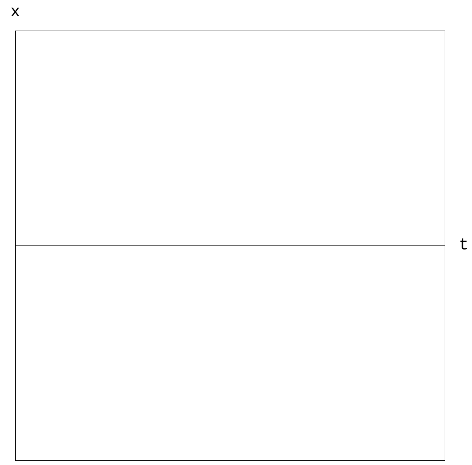
$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(t) = -\,kv_x(t), \tag{125}$$

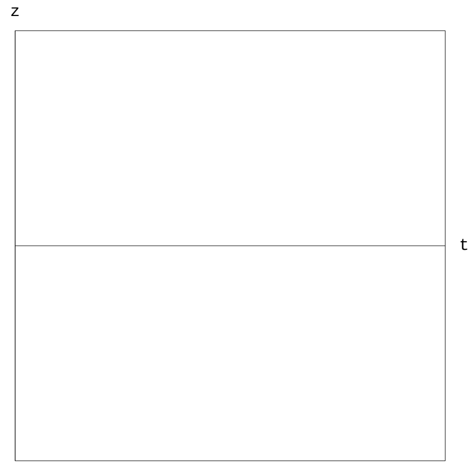
$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}(t) = -\,mg - kv_z(t). \tag{126}$$

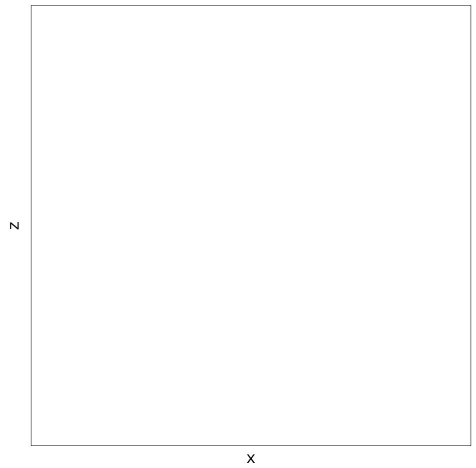
各々解けばよい.

$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}, \tag{127}$$

$$z(t) = C_3 - \frac{mg}{k}t + C_4\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{128}$$

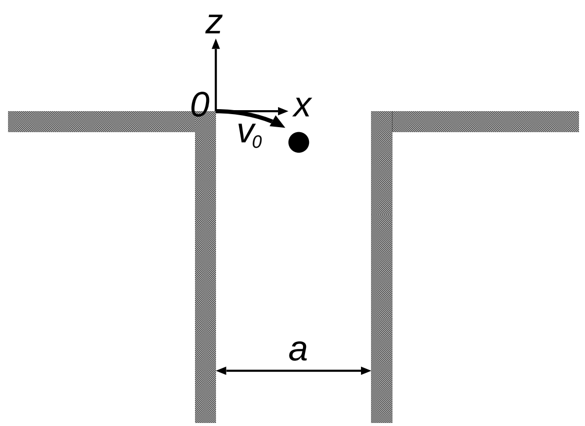






例題 17 図のような絶壁の頂上から, 質量 m の物体を打ち出すことを考える. 物体は, 重力 (重力加速度 g) と, 速度に比例する空気抵抗 (比例定数 k) を受けて運動する.

1. 図のように (x, z) 座標系を取る. x 方向, z 方向の運動方程式を書け.
2. 時刻 $t = 0$ に, 水平方向に, 初速度の大きさ v_0 で打ち出すとする. これを, $x(t), z(t)$ に対する初期条件として書け.
3. 運動方程式を, 初期条件のもとで解け.
4. 距離 $a > 0$ だけ離れたところに, もうひとつの絶壁がある. これに物体が到達するならば, その時刻を求めよ. 谷は十分 (無限に) 深いとする.
5. もうひとつの絶壁に到達するには, 初速度の大きさ v_0 はどれだけ以上でなくてはならないか.



小テスト 1 の解答の訂正

運動方程式

$$x(t) = t^2 + C_1 t + C_2, \quad C_1 = -3, C_2 = 3. \tag{3}$$

落体の運動 3.

$$z\left(\frac{v_0}{g}\right) = \frac{v_0^2}{2g} + z_0. \tag{11}$$

小テスト 2 の日程の変更

12/3(月) $\longrightarrow$ 12/10(月) と変更させてください.

この変更で不都合が生じる人は申し出てください. 不利にならないよう考慮します.

なお, 試験範囲は, 少なくとも,

- 変数分離型微分方程式,
- 空気抵抗 and/or 重力のもとでの運動,
- 斜面にそう運動

を含みます.

5.7 重力と空気抵抗のもとでの運動

質量 m の物体を考える. 鉛直上向きに z 軸, 水平方向に x 軸をとる.
z 軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_z$ とかくと, 運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\vec{e}_z - k\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t) \tag{129}$$

成分で書いて,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t), \tag{130}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg - k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \tag{131}$$

あるいは,

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(t) = -\,kv_x(t), \tag{132}$$

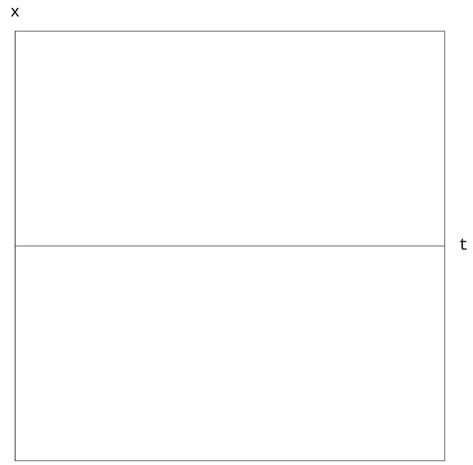
$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}(t) = -\,mg - kv_z(t). \tag{133}$$

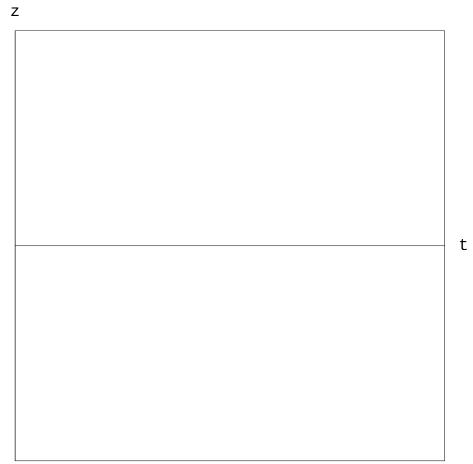
各々解けばよい.

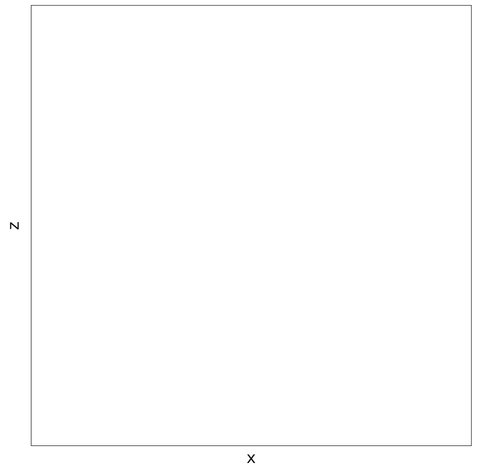
$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}, \tag{134}$$

$$z(t) = C_3 - \frac{mg}{k}t + C_4\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{135}$$

終端速度 は







例題 18 通常，空気抵抗の力の大きさは，速度に比例するが，仮に，速度の 2 乗に比例する空気抵抗と重力とを受ける物体があったとする．時刻 $t=0$ で，物体を鉛直下向きに速度 $v_0(<0)$ で発射する．運動方程式をたて，解いて，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ $(t>0)$ を求めよ．終端速度 v_∞ はどれだけか．質量を m，比例定数を k とする．

運動方程式は，

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{136}$$

問題の運動では，常に $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) < 0$ であるので，

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -g + \frac{k}{m}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 \times (+1) \tag{137}$$

あるいは $v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -g + \frac{k}{m}v(t)^2 \tag{138}$$

を解けばよい．変数分離形なので，

$$\frac{1}{v^2 - \frac{mg}{k}}\mathrm{d}v = \frac{k}{m}\mathrm{d}t \tag{139}$$

ここで **部分分数展開**

$$\boxed{} \tag{140}$$

に注意すると,

$$\int \frac{1}{2\sqrt{mg/k}}\left(\frac{1}{v-\sqrt{mg/k}}-\frac{1}{v+\sqrt{mg/k}}\right)\mathrm{d}v = \frac{k}{m}\int \mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2\sqrt{mg/k}}\left(\log|v-\sqrt{mg/k}|-\log|v+\sqrt{mg/k}|\right) = \frac{k}{m}(t-t_0) \quad (t_0\ \text{は積分定数})$$

$$\log\left|\frac{v(t)-\sqrt{mg/k}}{v(t)+\sqrt{mg/k}}\right| = 2\sqrt{kg/m}(t-t_0)$$

$$\frac{v(t)-\sqrt{mg/k}}{v(t)+\sqrt{mg/k}} = C\mathrm{e}^{2\sqrt{kg/m}\cdot t} \quad (C\ \text{は積分定数})$$

初期条件 $v(0)=v_0$ より, $C = \boxed{}$, $v(t) = \boxed{}$ (141)

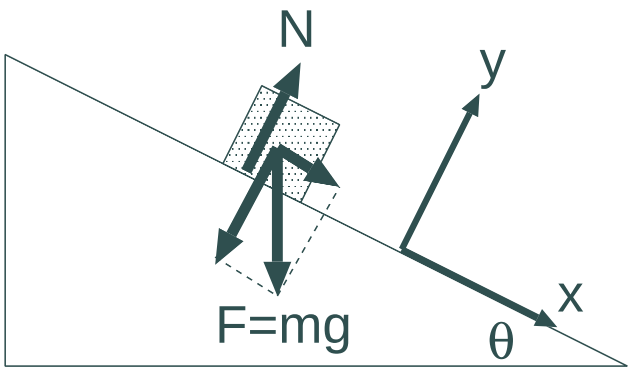
終端速度 $v_\infty = \sqrt{mg/k}$ $\left(\text{これは}\boxed{}\text{からも求まる}\right)$ (142)

4 斜面に沿う運動

佐本 4.1

水平から θ だけ傾いたなめらかな斜面をすべる物体 (質量 m).

運動方程式 (はたらく力は, $\vec{F}$: 重力, $\vec{N}$: 垂直抗力.)



$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} + \vec{N}. \tag{143}$$

成分で書くと,

$$\boxed{} \tag{144}$$

$$\boxed{}. \tag{145}$$

$\rightsquigarrow$

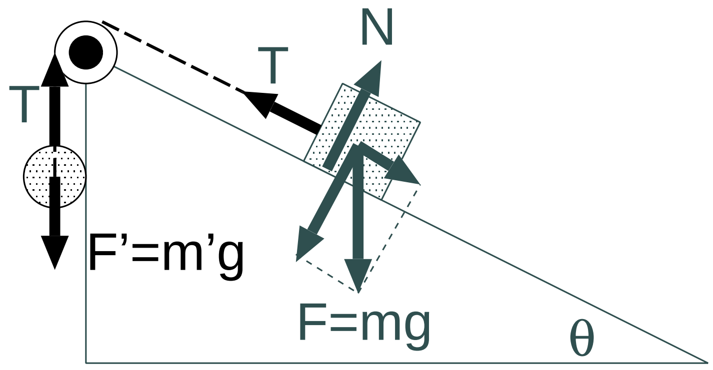
$$x(t) = \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2 + v_{x0}t + x_0, \tag{146}$$

$$y(t) = v_{y0} + y_0 = 0. \tag{147}$$

垂直抗力の大きさは,

$$N = mg\cos\theta \tag{148}$$

例題 19 **図の状況で**, **伸び縮みしないひもでつながれた** 2 **つの物体** (**質量** m, m') **の運動を求めよ**.
(*Hint.* **ひもの** $\boxed{\text{張力}}$ **を** T **とおけ**). **佐本** *4.2*



きょうの quiz

1. 通常, 空気抵抗の力の大きさは, 速度に比例するが, 仮に, 速度の 3 乗に比例する空気抵抗を受ける物体があったとする. 物体が他に力を受けない場合の運動を運動方程式を解いて求めよ (という意味は, $v(t)$ を積分定数の入ったままの形で求めよ). 質量を m, 比例定数を k とする.

   また, 重力 $-mg$ を受けて落下するときの終端速度を求めよ.

2. 水平から θ だけ傾いた, なめらかな面のうえにおかれた 質量 m の物体が, 鉛直下向の重力 mg を受けて運動する. 物体と面との間には摩擦力はないとする.

   斜面にそって下向きに x 軸をとる. 時刻 $t = t_0$ に, $x = 0$ から, 上向きに速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 < 0$ で打ち出したときの運動を, 運動方程式を解いて求めよ (という 意味は,$x(t)$ を求めよ).

   また, 速度に比例する空気抵抗の力を受けるときにはどうなるか.