前回の quiz の解答

1. **微分方程式**

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{1}$$

の解は, $x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ **で, いまは**, $\omega^2 = 8$ **の場合である. よって解は**, C_1, C_2 **を積分定数として**,

$$x(t) = C_1 \cos(2\sqrt{2}t) + C_2 \sin(2\sqrt{2}t) \tag{2}$$

このとき,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2\sqrt{2}(-C_1 \sin(2\sqrt{2}t) + C_2 \cos(2\sqrt{2}t)). \tag{3}$$

初期条件より,

$$1 = x(0) = C_1 \cos(2\sqrt{2} \cdot 0) + C_2 \sin(2\sqrt{2} \cdot 0) = C_1,$$

$$-1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 2\sqrt{2} \cdot (-C_1 \sin(2\sqrt{2} \cdot 0) + C_2 \cos(2\sqrt{2} \cdot 0)) = 2\sqrt{2}C_2.$$

よって, 初期条件を満たす解は,

$$x(t) = \cos(2\sqrt{2}t) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(2\sqrt{2}t) \tag{4}$$

これで十分な答えになっているが, 次の形にも変形できる.

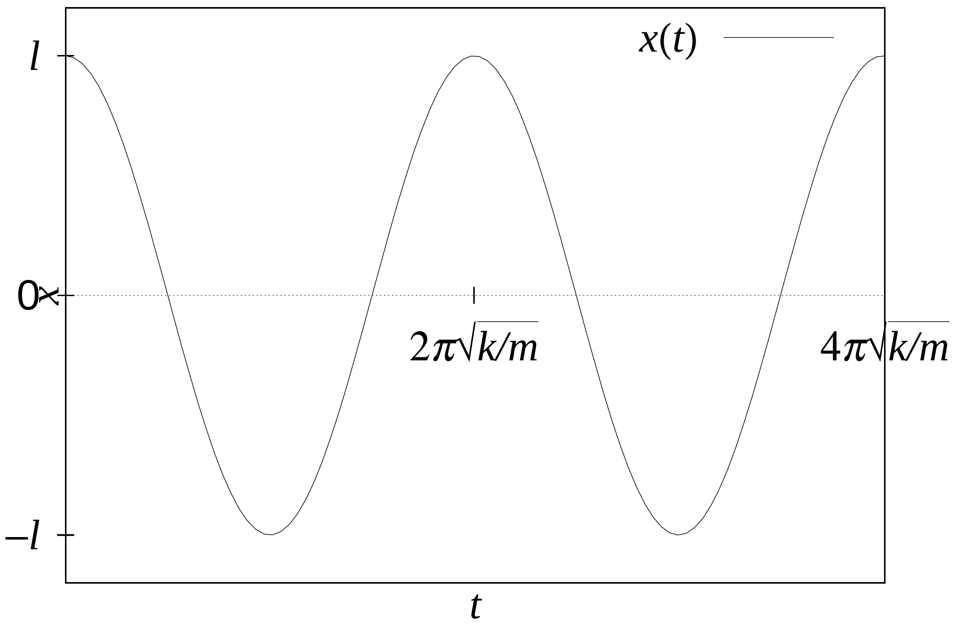
$$x(t) = \sqrt{\frac{9}{8}} \sin(2\sqrt{2}t + \theta_0), \quad \theta_0 = \arctan(-2\sqrt{2}). \tag{5}$$

2. 自然長からの変位を $x(t)$ とすると, 運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t). \tag{6}$$

初期条件は, $x(t) = \ell$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$. この解は, 上と同様に,

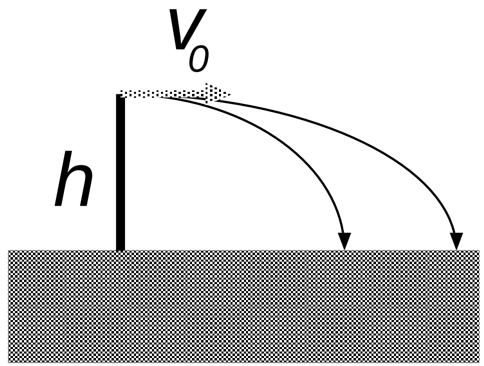
$$x(t) = \ell\cos(\sqrt{k/m}\cdot t). \tag{7}$$



問題

次のうち, 人間がいちばん遠くまで投げられるのは?(大きさは同じ)

- 5kg 砲丸
- ソフトボール
- 発泡スチロールの玉



高校物理的解答

高さ h のところから, 横方向に 速度 v_0 で投げるとする.

地表に落下するまでの時間 t は, 落下運動の公式から,

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \text{ より } t = \sqrt{2h/g}. \tag{8}$$

横方向には, 等速直線運動なので, この間に, $v_0 \times \sqrt{2h/g}$ だけ進む. よって, どれも同じ距離だけ飛ぶ.

うそ.

人間の腕の構造上, v_0(砲丸) $< v_0$(ソフトボール)

だからソフトボールのほうが飛ぶ.

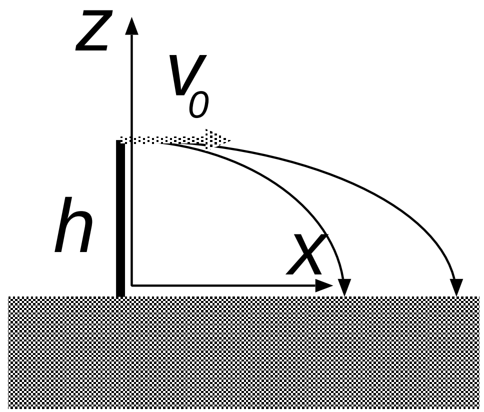
では発泡スチロールの玉は? v_0(発泡スチロール) $= v_0$(ソフトボール)

速度 $\vec{v}$ に比例する空気抵抗 $-k\vec{v}$ がはたらくとすると, 運動方程式は

$$(ma = F)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t), \tag{9}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) - mg \tag{10}$$



初期条件は, $x(0) = 0$, $z(0) = h$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

重要 比例定数 k は, 同じ 2 の物体なら同じ.

3 にはよらない.

(9) を解こう. $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおくと,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{k}{m}v(t)$$

$$\left(\boxed{\times\ \text{間違い}}\ \int \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\int \frac{k}{m}v\mathrm{d}v\right)$$

$\boxed{4}$

$$\frac{1}{v}\mathrm{d}v = -\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

$\boxed{5}$

$$\int \frac{1}{v}\mathrm{d}v = -\int \frac{k}{m}\mathrm{d}t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\log|v(t)| = -\frac{k}{m}t + C$$

$$|v(t)| = \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t+C} = \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{e}^{C}$$

$$v(t) = \pm\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} = C_1\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

初期条件 $v(0) = v_0$ **より**, $C_1 = v_0$. **もう一度積分して**,

$$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int v_0 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t = -\frac{mv_0}{k}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + C_2 \tag{11}$$

初期条件 $x(0) = 0$ **より**, $C_2 = +\frac{mv_0}{k}$.

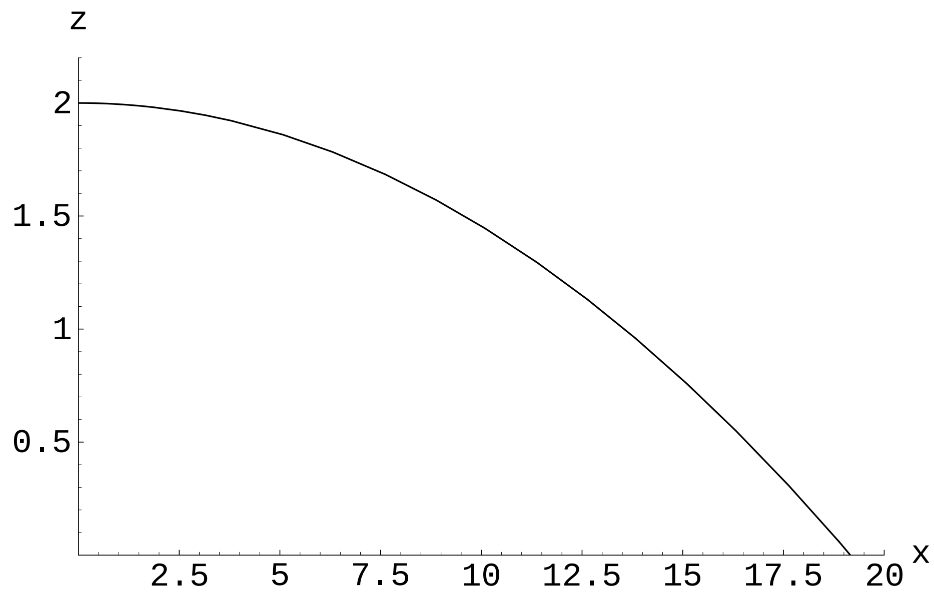
$$x(t) = \frac{mv_0}{k}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}) \tag{12}$$

空気抵抗が無い場合とは, **少し違う考え方をしよう**. h **が十分大きければ** (**東京タワーの上から投げた**!), **着地する時刻** t **は非常に大きいはず**.

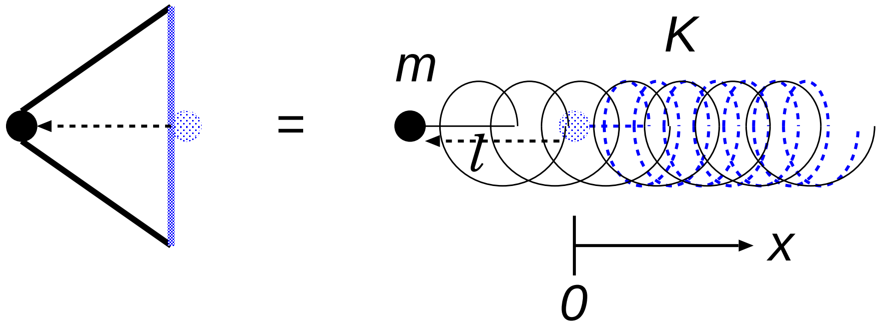
そこで, $t \to \infty$ **を考えよう**.$\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \to 0$ **より**,

$$x(t) \to \boxed{\quad 6 \quad} \tag{13}$$

確かに, m **が大きい方が遠くまで届く**.



人間の手は不確か．パチンコで打ち出してみよう．
バネ定数を K, ℓ だけ引き絞ってそっと手を放したとする．運動方程式は



$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -Kx(t). \qquad (14)$$

初期条件 $x(0) = -\ell$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$. **先週やったように解くと,**

$$x(t) = C_1 \cos(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t) + C_2 \sin(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t) \to x(t) = -\ell \cos(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t).$$

$x(T) = 0$ **となった瞬間に, ボールはパチンコを離れ, 力を受けなくなる.**

その時刻は $\sqrt{\frac{K}{m}} T = \pi/2 \rightsquigarrow T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{K}}$.

その瞬間の速度 $v_0 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) = \ell\sqrt{\frac{K}{m}} \sin(\frac{\pi}{2}) = \ell\sqrt{\frac{K}{m}}$.

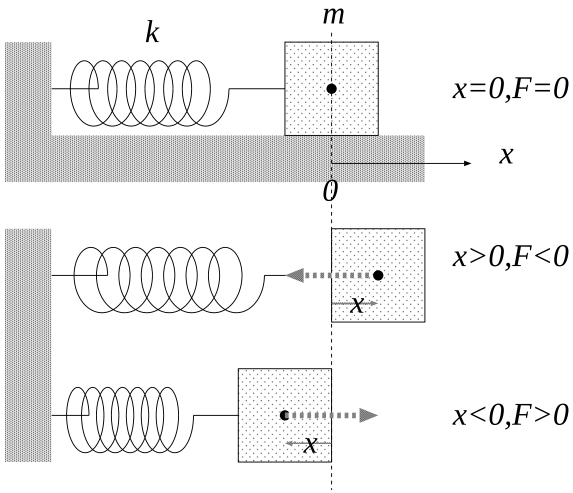
飛ぶ距離 7

8 減衰振動と複素数

8.1 単振動の復習

バネ (**バネ定数** k) **の先についた**, **質量** m **の物体の運動方程式は**

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t). \tag{15}$$



$m = k = 1$ **と思うと**,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + x(t) = 0.$$

解は $x(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t).\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -C_1\sin(t) + C_2\cos(t).$ (16)

初期条件 $x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ **を課すと**, $C_1 = 1, C_2 = 0.$

$$x(0) = C_1 = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -C_2 = 0 \rightsquigarrow x(t) = \cos t. \tag{17}$$

8.2 空気抵抗を受けるバネ: 減衰振動

速度に比例する空気抵抗 $-c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ もある場合を考えよう.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{19}$$

このような運動を 減衰振動 という.

一般に,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + a\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + b\cdot x(t) = 0. \quad (a,b \text{ は定数}) \tag{20}$$

というタイプの微分方程式を考えよう.

例題 1

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 3 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 2 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{21}$$

1

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \tag{22}$$

quiz 1 **配った紙にやってね.**

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) - 3 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 4 \tag{23}$$

8.3 虚数の指数関数

'$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$' **とおく**, **は便利**. **単振動にも使えないか**?

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + x(t) = 0, \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0 \tag{24}$$

は, $a = 0, b = 1$ **の場合**. **やってみよう**.

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいてみる**.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t}$$

よって $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + x(t) = (\lambda^2 + 1)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0.$$

$\lambda^2 + 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda = \pm i$ (?????)

$\boxed{\text{虚数単位}}$ $i = \sqrt{-1}$ は $i^2 = -1$ を満たす．複素数 $x + iy$ の i.

知らん顔して計算すると，

$$x(t) = D_1 \mathrm{e}^{it} + D_2 \mathrm{e}^{-it}. \tag{25}$$

は解．初期条件より，

$$x(0) = D_1 \mathrm{e}^{i0} + D_2 \mathrm{e}^{-i0} = D_1 + D_2 = 1. \tag{26}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = iD_1 \mathrm{e}^{it} - iD_2 \mathrm{e}^{-it} \text{だから}\right) \tag{27}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = iD_1 \mathrm{e}^{i0} - iD_2 \mathrm{e}^{-i0} = iD_1 - iD_2 = 0. \tag{28}$$

ここで $\mathrm{e}^0 = 1$ を使った．

解いて，$D_1 = D_2 = \frac{1}{2}$.

この解は $x(t) = \cos t$ **だったはず**.

$$x(t) = \cos t \stackrel{?}{=} \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{it} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-it}. \tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\sin t \stackrel{?}{=} \tfrac{i}{2}\mathrm{e}^{it} - \tfrac{i}{2}\mathrm{e}^{-it}. \tag{30}$$

したがって,

$$(\text{上}) + \frac{1}{i}\cdot(\text{下}) = \cos t + i\sin t \stackrel{?}{=} \mathrm{e}^{it}. \tag{31}$$

8.4 オイラーの公式

気分のために t を θ とかく.

定義. 実数 θ に対して

$$\boxed{}^{2} \cdots \text{オイラーの公式} \tag{32}$$

定義. 複素数 $z = a + i\theta$ (a と θ は実数) に対して,

$$\boxed{}^{3} \tag{33}$$

3 年で関数論を学ぶと, これで ‘よい’ というのが心から納得できます.

性質. 複素数 $z = x + iy, w = u + iv$ に対して,

$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^{x+iy+u+iv} = \mathrm{e}^{(x+u)+i(y+v)} = \mathrm{e}^{x+u}\mathrm{e}^{i(y+v)} \tag{34}$$

$$= \mathrm{e}^{x+u}(\cos(y+v) + i\sin(y+v)) = \cdots (\text{加法定理}) = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{y}\mathrm{e}^{iy}\mathrm{e}^{iv} = \mathrm{e}^{z} \times \mathrm{e}^{w} \tag{35}$$

例題 2 $z = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i},\ z^2,\ z^{100}, 1/z$ **の実部，虚部を求めよ．**

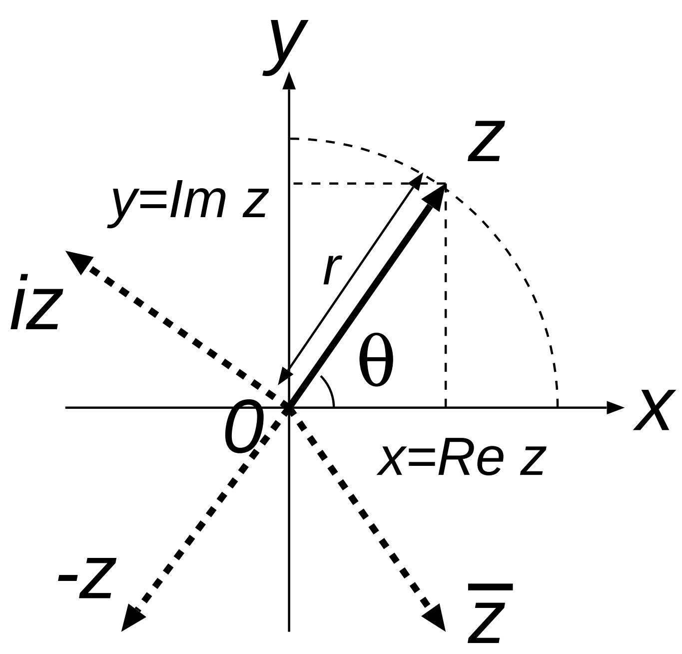
4

$z = x + iy$ **は足し算が得意．** $z = \mathrm{e}^{a+i\theta}$ **は掛け算が得意．**

8.5 極表示

x, y, r, θ は実数, $r \geq 0$.

		普通の表示	極表示
複素数	z	$=x+iy$	$=re^{i\theta}$
実部	$\mathrm{Re}\, z$	$=x$	$=r\cos\theta$
虚部	$\mathrm{Im}\, z$	$=y$	$=r\sin\theta$
絶対値	$\lvert z\rvert$	$=\sqrt{x^2+y^2}$	$=r(\geq 0)$
偏角	$\arg z$	$=\arctan\frac{y}{x}$	$=\theta$
複素共役	$\bar{z}$	$=x-iy$	$=re^{-i\theta}$



いくつかの公式

(定義に戻ればすぐに導けるのでおぼえなくても OK).

$z = x + iy = re^{i\theta}$, ($x, y, r, \theta$ **は実数**.)

e^z の性質.

$$e^{2\pi i} = 1, e^{\pi i} = -1. \tag{36}$$

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} = e^x \tag{37}$$

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \quad \text{特に } \overline{e^{iy}} = e^{-iy}. \tag{38}$$

微分積分

$$\frac{d}{dt} e^{zt} = z e^{zt}. \tag{39}$$

$$\int e^{zt} dt = \frac{1}{z} e^{zt} + C. \tag{40}$$

オイラーの公式を逆に解いたもの

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \tag{41}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \tag{42}$$

複素共役, -1 倍, 逆数.

$$\bar{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}, \tag{43}$$

$$-z = -r(e^{i\theta}) = re^{i(\theta+\pi)}, \tag{44}$$

$$1/z = (re^{i\theta})^{-1} = (1/r)e^{-i\theta} \tag{45}$$

例題 3 微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) = 0. \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 1. \tag{46}$$

を, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ **は一般には複素数**) **とおくことによって解け**.

5

quiz 2

微分方程式を

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 16x(t) = 0, \qquad x(0) = 4, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -4. \tag{47}$$

を, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ **は一般には複素数**) **とおくことによって解け**.

お知らせ

小テスト 1,2 **の追試のお知らせを掲示しています**.

小テスト 2 解答訂正(**すみません**).

問 2(2) **積分定数きめる前は** $\pm$ **の可能性があります**.

$x(t) = \boxed{\pm}(-4C - 4t)^{-1/4} \rightsquigarrow$ **初期条件** $\rightsquigarrow (\frac{1}{16} - 4t)^{-1/4} = \pm 2(1 - \boxed{64}\,t)^{-1/4}$

先週の quiz 2

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて代入すると,

$$(\lambda^2 + 16)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{48}$$

よって, $\lambda^2 + 16 = 0$ より $\lambda = \pm 4i$ で, 解は

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{4it} + C_2 \mathrm{e}^{-4it}. \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数}) \tag{49}$$

初期条件より, $C_1 = 2 + \frac{i}{2}, C_2 = 2 - \frac{i}{2}$. となり,

$$x(t) = (2 + \tfrac{i}{2})\mathrm{e}^{4it} + (2 - \tfrac{i}{2})\mathrm{e}^{-4it} \tag{50}$$

$\theta = \pm 4t$ と思ってオイラーの公式 $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を使うと,

$$\begin{aligned} x(t) =& (2 + \tfrac{i}{2})(\cos 4t + i\sin 4t) + (2 - \tfrac{i}{2})(\cos(-4t) + i\sin(-4t)) \\ =& \cdots = (4\cos 4t - \sin 4t) + i \times 0. \end{aligned} \tag{51}$$

9 減衰振動, 臨界制動, 過減衰

9.1 復習

速度に比例する空気抵抗 $-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **もある場合を考えよう** ($\gamma > 0$, **定数**. **今まで よく** k **と書いてた**).

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\cdot x(t) - \gamma\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{52}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\gamma}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{53}$$

一般に,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + c\cdot x(t) = 0. \quad (b, c\ \textbf{は定数}) \tag{54}$$

というタイプの微分方程式を解くには, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいて** λ **をきめる**.

虚数が出てきたら, $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (θ: **実数**. **オイラーの公式**).

例題 4

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 5 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{55}$$

1

$$x(t) = \mathrm{e}^{-2t} \times (1 \cdot \cos t + 2 \cdot \sin t). \tag{56}$$

9.2 特性方程式と解の分類

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + c \cdot x(t) = 0. \quad (b,c \text{ は定数}) \tag{57}$$

という微分方程式は, b, c **の値に応じて異なるタイプの解を持つ**.

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいて代入**.

$$(\lambda^2 + b\lambda + c)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{58}$$

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{59}$$

これは λ **をきめる** 2 **次方程式**.　$\cdots\cdots$ $\boxed{2 \qquad\qquad}$.

$$\boxed{3 \qquad\qquad\qquad} D = b^2 - 4c. \tag{60}$$

解は, D **の値によって分類される**.

$\boxed{D > 0\ \text{のとき}}$ 2 実根. $\lambda = \alpha, \beta($ $\alpha \neq \beta$, α, β は実数).

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\alpha t} + C_2 \mathrm{e}^{\beta t}. \tag{61}$$

$\boxed{D < 0\ \text{のとき}}$ 互いに複素共役な 2 複素根. $\lambda = \mu \pm i\omega$. $(\mu, \omega$ は実数).

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{(\mu + i\omega)t} + C_2 \mathrm{e}^{(\mu - i\omega)t} \tag{62}$$

$$= \mathrm{e}^{\mu t}(C_1 \mathrm{e}^{i\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-i\omega t}) \tag{63}$$

$$= \mathrm{e}^{\mu t}((C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t) \tag{64}$$

$$= \mathrm{e}^{\mu t}(D_1 \cos\omega t + D_2 \sin\omega t) \tag{65}$$

$\boxed{D = 0\ \text{のとき}}$ 重根. $\lambda^2 + b\lambda + c = (\lambda + b/2)^2$. $\alpha = -b/2$ は実数.

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\alpha t}.??? \tag{66}$$

積分定数が 1 個しかないのはおかしい.

重要: $\boxed{4 \qquad\qquad}$ **も解．なぜなら**

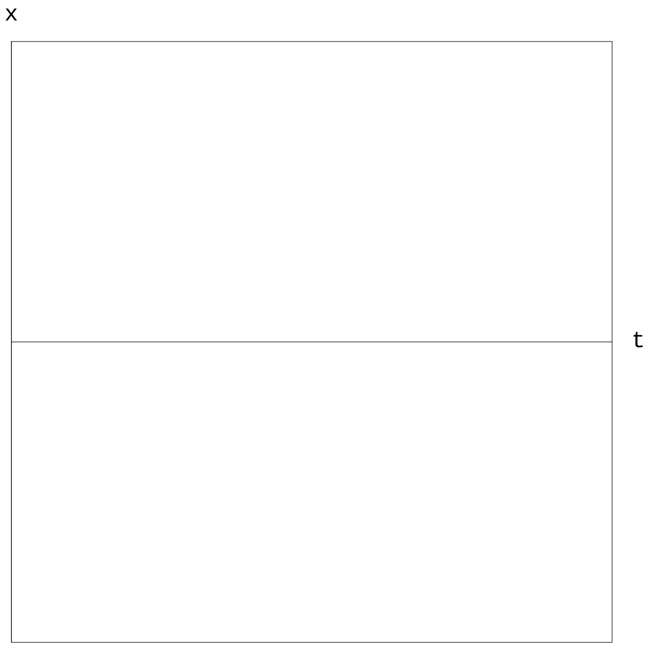
$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t \times \mathrm{e}^{\alpha t}) =& (\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t)\mathrm{e}^{\alpha t} + t(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\alpha t}) = (1+\alpha t)\mathrm{e}^{\alpha t} \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(t \times \mathrm{e}^{\alpha t}) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(1+\alpha t)\mathrm{e}^{\alpha t}] \\
=& \boxed{5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
=& (\alpha + (1+\alpha t)\alpha)\mathrm{e}^{\alpha t}
\end{aligned}
$$

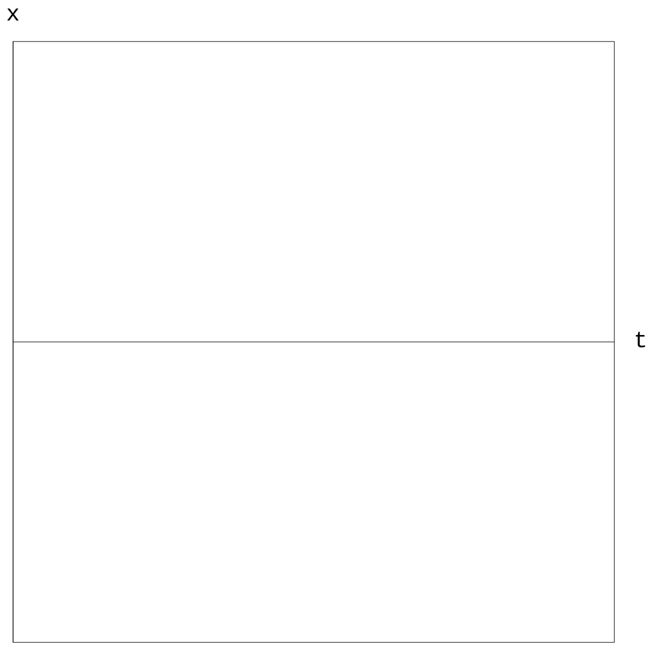
より

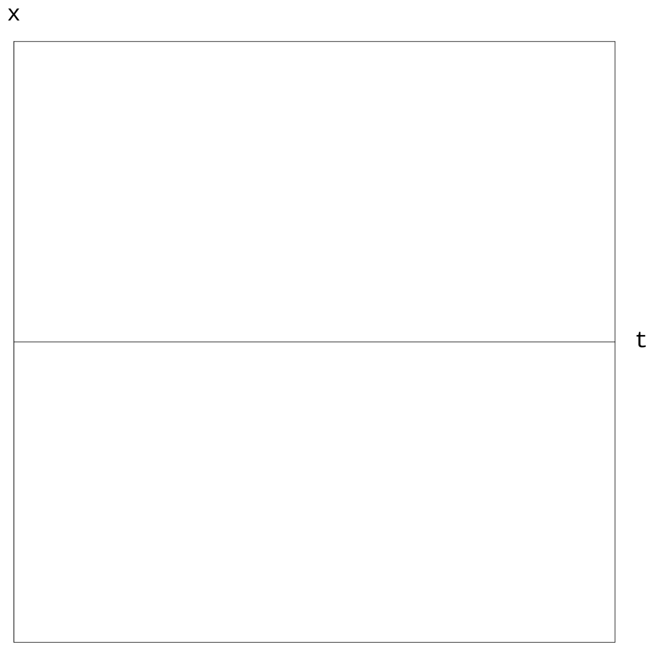
$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + cx(t) =& [(\alpha + (1+\alpha t)\alpha) + b(1+\alpha t) + c]\mathrm{e}^{\alpha t} \\
=& [(\alpha^2 + b\alpha + c)t + (2\alpha + b)]\mathrm{e}^{\alpha t} \\
=& [0 \times t + 0]\mathrm{e}^{\alpha t} = 0.
\end{aligned}
$$

なぜなら, $\lambda = \alpha$ **は** $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ **の解**, **また**, $\alpha = -b/2$ **だから．この** 2 **つを加えたものも解で**, $\boxed{6 \qquad\qquad\qquad\qquad}$

9.3 $D>0, D<0, D=0$ の解の様子







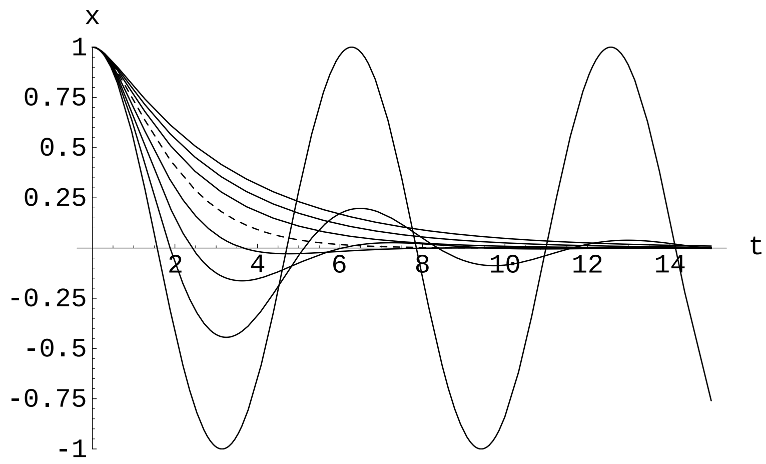
9.4 過減衰, 減衰振動, 臨界制動

速度に比例する空気抵抗 $-\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **のあるバネ**

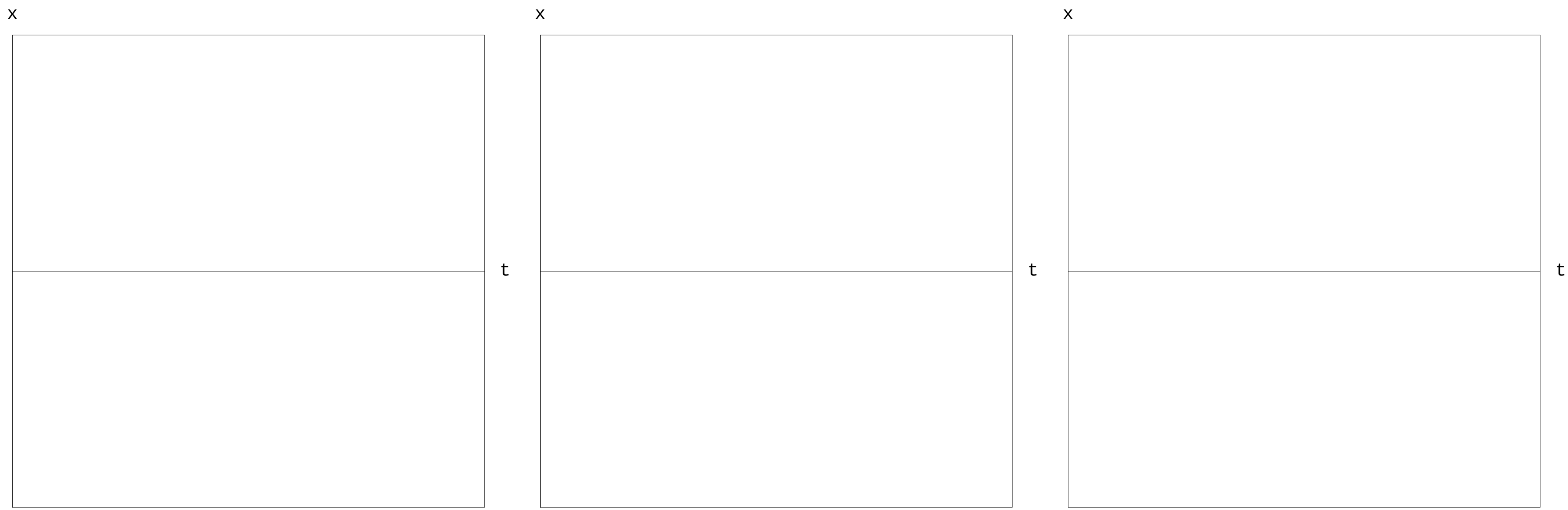
$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{67}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\gamma}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{68}$$

の場合には, $k > 0, \gamma > 0$. **特性方程式の判別式** $D = \frac{1}{m^2}(\gamma^2 - 4mk)$.



- **過減衰** $D > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{mk} < \gamma$
- **臨界制動** $D = 0 \Leftrightarrow \gamma = 2\sqrt{mk}$
- **減衰振動** $D < 0 \Leftrightarrow 0 < \gamma < 2\sqrt{mk}$



quiz 1 配った紙にやってね.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 5 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 4. \tag{69}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + x(t) = 0. \qquad x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{70}$$

10 エネルギー保存則とポテンシャルエネルギー

位置 x **だけで決まる力** $F(x)$ **を受けて** 1 **次元の運動をする**, **質量** m **の質点を考えよう**.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F(x(t)). \tag{71}$$

あてはまる例. **バネの力**.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t). \quad \text{すなわち} \quad F(x) = -k \cdot x. \tag{72}$$

そうでない例. **空気抵抗を受けるバネ**.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t) - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{73}$$

力 F **は**, x **と** v **の関数**. **場所** x **だけでは決まらない**.

(98) で $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおくと,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = F(x(t)). \tag{74}$$

誰かが思いついたトリック. 両辺に $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ をかける.

$$mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{75}$$

$$\int mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t = \int F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \tag{76}$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \text{ より, 左辺} = \int mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv^2 + C. \tag{77}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \text{ より, 右辺} = \int F(x)\mathrm{d}x. \tag{78}$$

関数 $U(x)$ を, 力 $F(x)$ から

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' \tag{79}$$

で定義すると,

$$\frac{1}{2}mv^2 + C = -U(x).\text{すなわち}\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x) = E(\text{一定.}) \tag{80}$$

第 1 項 $\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2$ を質点の 運動エネルギー という.

(106) で定義される第 2 項 $U(x)$ を質点の ポテンシャル, または 位置エネルギー という.

逆に, 力 $F(x)$ が $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x)$ で与えられるような関数 $U(x)$ をポテンシャルという, と思ってもよい.

両者の和 E を, 力学的エネルギー という.

式 (108) は, 力 $F(x)$ のもとで, ニュートンの運動方程式にしたがって運動する質点については, 力学的エネルギー E が一定で変化しないことをいっている.

これを,

力学的エネルギーは $\boxed{\text{保存する}}$ (不変である)

力学的エネルギーは $\boxed{\text{保存量}}$ である

などという.

$\boxed{\text{例}}$ 重力のもとでの鉛直方向の運動. 高さを z とかく. $F(z) = mg$.

位置エネルギー
$$U(z) = -\int_0^z F(z)\,\mathrm{d}z' = -\int_0^z mg\,\mathrm{d}z' = mgz. \tag{81}$$

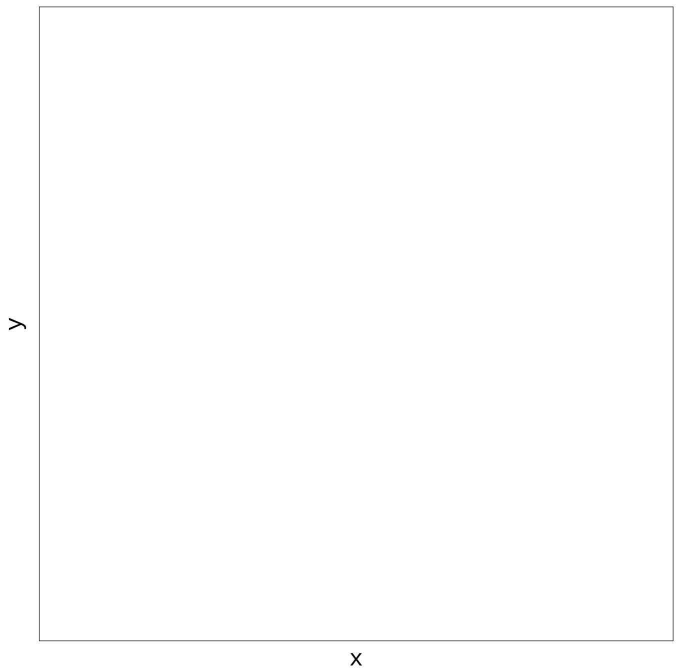
力学的エネルギーの保存
$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + mgz(t) = \text{一定}. \tag{82}$$

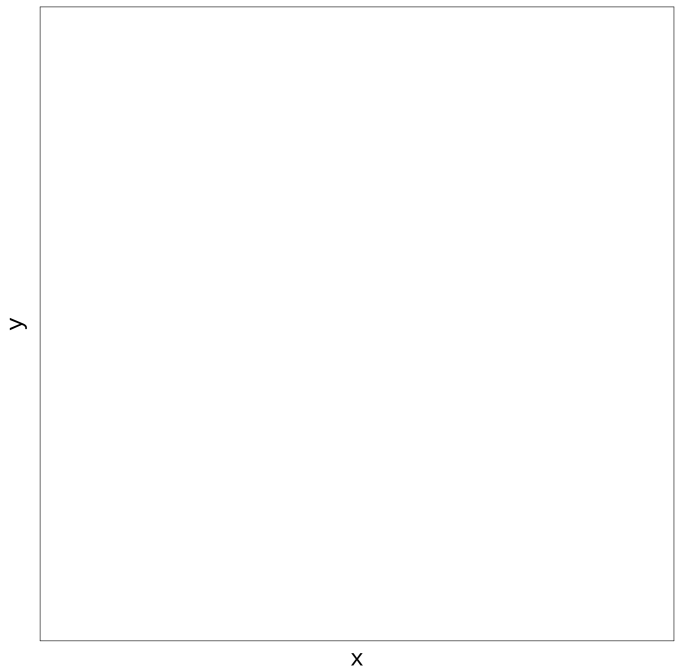
例 **バネの力のもとでの運動. 自然長からの変位を x と書く.**

$F(x) = -kx.$

$$\textbf{位置エネルギー}\ U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = -\int_0^x (-kx')\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}kx^2. \tag{83}$$

$$\textbf{力学的エネルギーの保存}\quad \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}k(x(t))^2 = \textbf{一定}. \tag{84}$$





先週の quiz

- $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+5\cdot x(t)=0. \qquad x(0)=0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=4. \tag{85}$$

特性方程式は $\lambda^2+\lambda+5=0$. **よって**, $\lambda=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{19}i)$. **解は**

$$x(t)=C_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{19}i)t}+C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{19}i)t}. \tag{86}$$

初期条件から積分定数 C_1, C_2 **を決定する**.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=C_1\frac{-1+\sqrt{19}i}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{19}i)t}+C_2\frac{-1-\sqrt{19}i}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{19}i)t}. \tag{87}$$

より,

$$(x(0)=C_1\mathrm{e}^0+C_2\mathrm{e}^0=)C_1+C_2=0 \tag{88}$$

$$(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=)C_1\frac{1}{2}(-1+\sqrt{19}i)+C_2\frac{1}{2}(-1-\sqrt{19}i)=4 \tag{89}$$

これを解くと,

$$C_1 = -C_2 = \frac{4}{\sqrt{19}i}. \tag{90}$$

よって,

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\frac{4}{\sqrt{19}i}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(+\sqrt{19}i)t} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-\sqrt{19}i)t}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\frac{8}{\sqrt{19}}\sin\frac{\sqrt{19}}{2}t \tag{91}$$

- $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + x(t) = 0. \qquad x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{92}$$

特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. これは重根 $\lambda = -1$ を持つので, e^{-t} の他に, $t \times \mathrm{e}^{-t}$ も解になっている. よって,

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2 t\mathrm{e}^{-t}. \tag{93}$$

積分定数を C_1, C_2 **を初期条件から決定する**.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -C_1\mathrm{e}^{-t} + (C_2 - C_2 t)\mathrm{e}^{-t} \tag{94}$$

より,

$$x(0) = C_1\mathrm{e}^0 + C_2 0\mathrm{e}^0 = C_1 = 2. \tag{95}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -C_1\mathrm{e}^0 + (C_2 - C_2 0)\mathrm{e}^0 = -C_1 + C_2 = 0 \tag{96}$$

よって, $C_1 = C_2 = 2$.

$$x(t) = 2(1+t)\mathrm{e}^{-t}. \tag{97}$$

訂正．p.104(2002/01/07)　すみません．ページごと以下と入れ替えてください．

9.1 過減衰，減衰振動，臨界制動

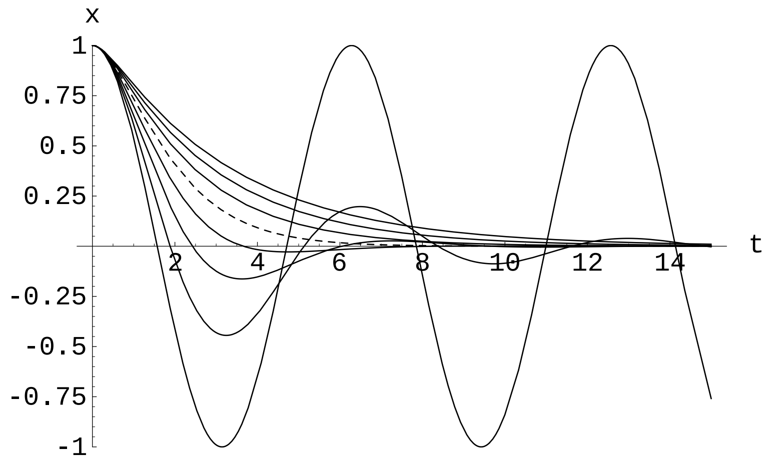
速度に比例する空気抵抗 $-\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **のあるバネ**

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{67}$$

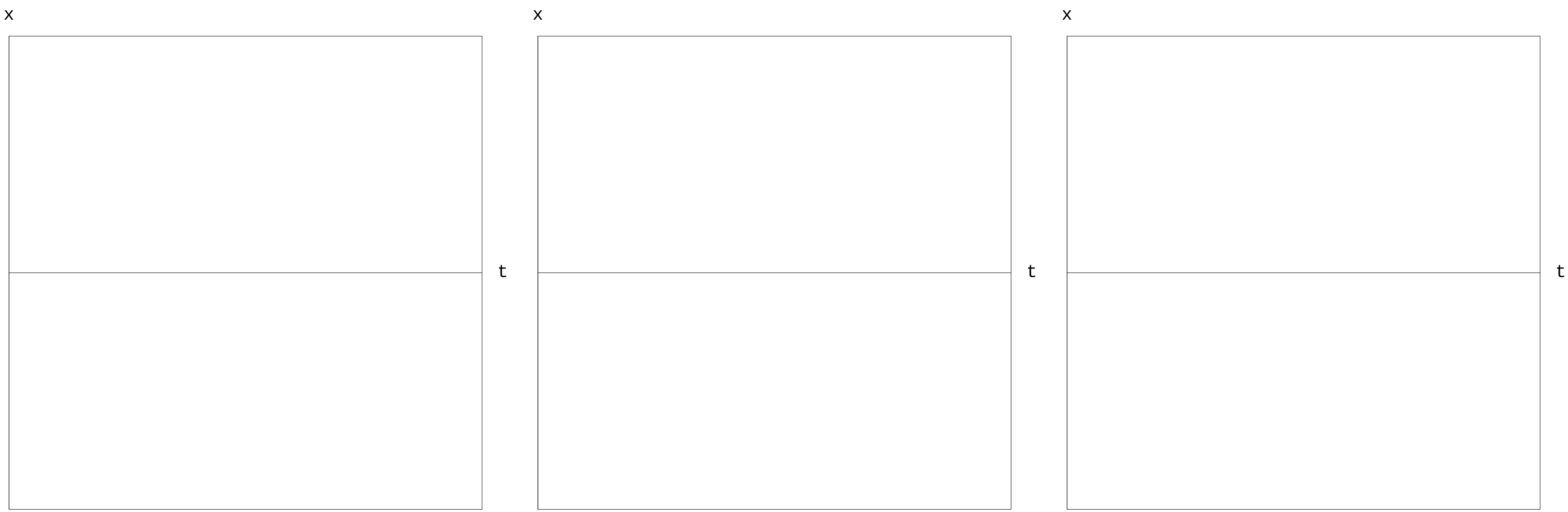
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\gamma}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{68}$$

の場合には, $k > 0, \gamma > 0$. **特性方程式の判別式** $D = \frac{1}{m^2}(\gamma^2 - 4mk)$.

訂正. p.105(2002/01/07)　すみません. ページごと以下と入れ替えてください.



- **過減衰** $D > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{mk} < \gamma$
- **臨界制動** $D = 0 \Leftrightarrow \gamma = 2\sqrt{mk}$
- **減衰振動** $D < 0 \Leftrightarrow 0 < \gamma < 2\sqrt{mk}$



10 エネルギー保存則と位置エネルギー

10.1 力学的エネルギーの保存 (1 次元)

位置 x **だけで決まる力** $F(x)$ **を受けて** 1 **次元の運動をする**, **質量** m **の質点を考えよう**.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F(x(t)). \tag{98}$$

あてはまる例 **バネの力**.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t). \quad \textbf{すなわち} \quad F(x) = -k \cdot x. \tag{99}$$

そうでない例 **空気抵抗を受けるバネ**. **力** F **は**, x **と** v **の関数**.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t) - \gamma \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{100}$$

(98) で $v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおくと,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)=F(x(t)). \tag{101}$$

誰かが思いついたトリック. 両辺に $v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ をかける.

$$mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)=F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{102}$$

$$\int mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t=\int F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \tag{103}$$

$$\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t\text{ より, 左辺}=\int mv\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv^2+C_1. \tag{104}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t\text{ より, 右辺}=\int F(x)\mathrm{d}x. \tag{105}$$

関数 $U(x)$ を, 力 $F(x)$ から

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' \tag{106}$$

で定義する (高校で物理を勉強した人へのコメント: これは, 質点のされる $\boxed{\text{仕事}}$).

$$\frac{1}{2}mv^2 + C_1 = -U(x) + C_2. \tag{107}$$

すなわち $$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x) = E.(\text{一定}) \tag{108}$$

第 1 項 $\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2$ を質点の $\boxed{1\qquad\qquad}$ という.

(106) で定義される第 2 項 $U(x)$ を質点の $\boxed{2\qquad\qquad}$, または $\boxed{3\qquad\qquad}$ という.

両者の和 E を, $\boxed{4\qquad\qquad}$ という.

式 (108) は, 力 $F(x)$ のもとで 1 次元を運動する質点の力学的エネルギー E は一定で変化しないことをいっている. これを,

力学的エネルギーは 5, 6 である, 不変である

などという.

一般に, 力 F が, ある関数 U を用いて,

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x) \qquad (109)$$

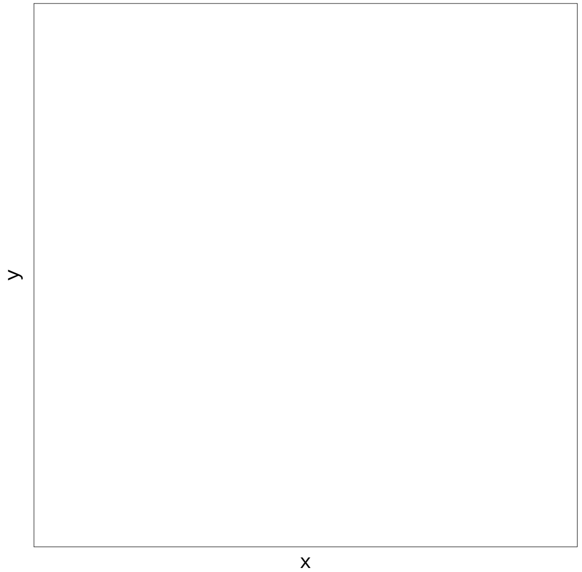
と書けるとき, 関数 $U(x)$ をポテンシャルまたは位置エネルギーという.

$$U(x) \xrightarrow{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} F(x), \qquad F(x) \xrightarrow{-\int \mathrm{d}x} U(x)$$

$U(x)$ には, 定数の不定性がある. つまり $U(x)+C$ が位置エネルギーと思ってもよい.

力 F がポテンシャルを用いて書けるとき, F は $\boxed{\text{保存的}}$ であるという.

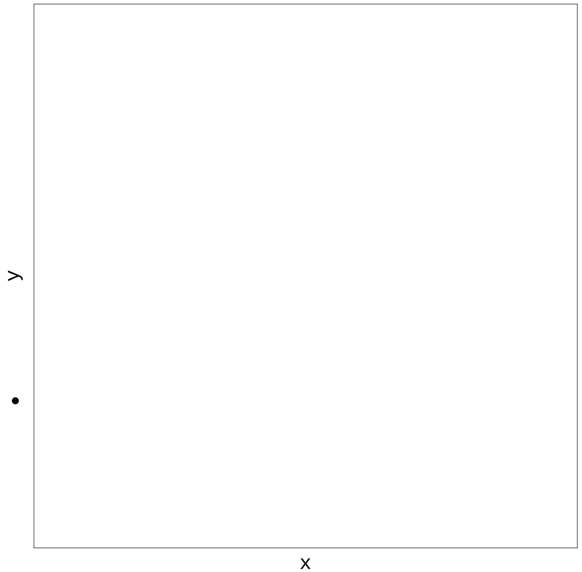
例 **重力のもとでの鉛直方向の運動．高さを z とかく．** $F(z) = -mg$.



$$U(z) = -\int_0^z F(z)\,\mathrm{d}z' = -\int_0^z mg\,\mathrm{d}z' = mgz.$$

保存則　$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + mgz(t) = E(\textbf{一定}).$$

例 **バネの力のもとでの運動．自然長からの変位を** x. $F(x) = -kx$.



$$U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = -\int_0^x (-kx')\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}kx^2.$$

保存則　$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}k(x(t))^2 = E(\textbf{一定}).$$

例題 5　*1.* ポテンシャルが $U(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$ であるとき, 質点が受ける力 $F(x)$ を求めよ.

2. 重力のもとで (重力加速度 g), 質量 m の質点を, 地表から速度 v_0 で鉛直上向きに打ち出した. 最高点の高さを, 力学的エネルギー保存則を用いて求めよ.

7

quiz 1

1. 1 次元を運動する質点にはたらく力が $F(x) = -x - x^3$ であるとき, ポテンシャル $U(x)$ を求めよ.

2. ばね定数 k のばねに取りつけられた, 質量 m の質点を考える. 自然長から x_0 だけ引きのばして, 静かに手を放した. 自然長に戻ったときの速さを, 力学的エネルギー保存則を用いて求めよ.

10.2 位置エネルギーを用いた運動の解析

力学的エネルギー E を持つ物体の運動は,

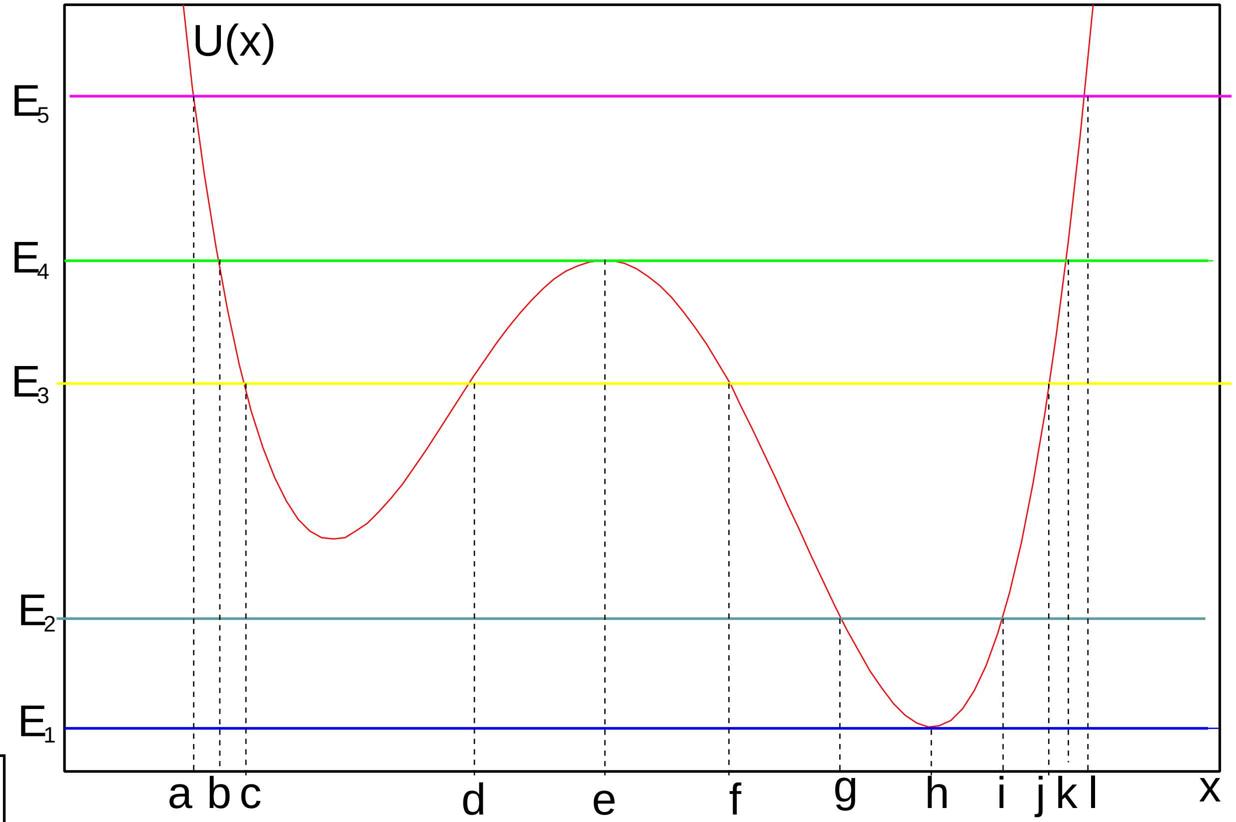
$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x) = E. \tag{110}$$

を満たす (力学的エネルギー保存則). 変形して,

$$E - U(x) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 \geq 0. \tag{111}$$

- 質点は, $E - U(x) \geq 0$ であるような x にしか移動できない.
- $E - U(x) = 0$ であるような x では, 速度が 0 になる.

この性質を用いて, 質点の運動の様子を理解できる.



例

$E = E_1$ **のとき**, $x = h$ **で静止**.

$E = E_3$ **のとき**, $c \le x \le d$ **を往復**. **または**, $f \le x \le j$ **を往復**

$E = E_4$ **のとき**, $x = e$ **で静止**. **または**, $b \le x < e$ **から** $x = e$ **に限りなく近づく**. **または**, $e < x \le j$ **から** $x = e$ **に限りなく近づく**. $(t \to \infty)$

quiz 2　$E = E_2, E_5$ **のときの運動を説明せよ**.

10.3 興味と暇がある人のための注 1

(108) を $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ について解いた

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \tag{112}$$

を積分することによっても $x(t)$ が求められる．落下運動の場合:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - mgz)} \text{より} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\frac{E}{mg} - z}} = \sqrt{2g}\mathrm{d}t \tag{113}$$

10.4 興味と暇がある人のための注 2

3 次元での力とポテンシャルとの関係

$$\vec{F}(\vec{r}) = (-\frac{\partial U}{\partial x}(\vec{r}), -\frac{\partial U}{\partial y}(\vec{r}), -\frac{\partial U}{\partial z}(\vec{r})). \tag{114}$$

2 次元以上では，保存的でない力のほうが普通．(応用ベクトル解析参照)

きょうの quiz **の略解は**, 1/22 **以降に** 1-508 **前トレイで配布します**.

期末試験範囲

基本的には, 後期の講義で扱った部分すべてです. 講義ノートに載っていても, 説明しなかった事項は試験範囲ではありません. (**とばした部分を取り除いた講義ノートを**
http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/ **に置いています**)

次の問題は出します.

- **変数分離型微分方程式** ($\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(x(t))g(t)$).
- **複素数. オイラーの公式. 極表示**.
- **空気抵抗を受ける/受けないばねの運動と** $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + cx(t) = 0$ **タイプの微分方程式**.

先週の quiz 1

1. **ポテンシャル** $U(x)$ **は**,

$$U(x) = -\int^x F(x')\mathrm{d}x' = -\int^x (-x' - {x'}^3)\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C \tag{115}$$

C **は積分定数で**, **不定**.

2. **変位を** x, $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ **とすると位置エネルギーは** $\frac{1}{2}kx^2$ **なので**, **力学的エネルギー保存則は**,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad (\text{一定}) \tag{116}$$

静かに $(v = 0)$ **手を離した瞬間の左辺は**

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2. \tag{117}$$

自然長に戻った $(x=0)$ 瞬間の速度を v_0 とすると, 左辺は

$$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}k\cdot 0^2. \tag{118}$$

これらが等しいことと, 速度の向きを考えて,

$$v_0=-x_0\sqrt{\frac{k}{m}}.\quad \text{速さは}\quad |v_0|=x_0\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{119}$$

先週の quiz 2

$E=E_2$　$x=g$ と $x=i$ の間の往復を繰り返す. $x=h$ でもっとも速い.

$E=E_5$　$x=a$ と $x=\ell$ の間の往復を繰り返す. どちら向きのときも, $x=e$ 付近でいったん減速する. $x=h$ でもっとも速い.