物理数学 II

樋口さぶろお[a]

- 講義の Web page
  http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/
- この紙は, 上の Web page や 1-508 前の引き出しで事前に配っていることもあります.
- 成績は 期末試験 (+ 平常点).
- 毎回の最後に, 理解を確かめる quiz をします. 配った紙に解いて提出してください. フォルダーを学籍番号でグループ分けしています.
- 紙は, チェックした後, 1-508 前の引き出しで返却します. ただし, 数週間以上経過したものは処分することがあります.
- 佐本 n.m, 佐本 p99 などは, 参考文献 (佐川-本間 力学) の参照個所を示します.

[a] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

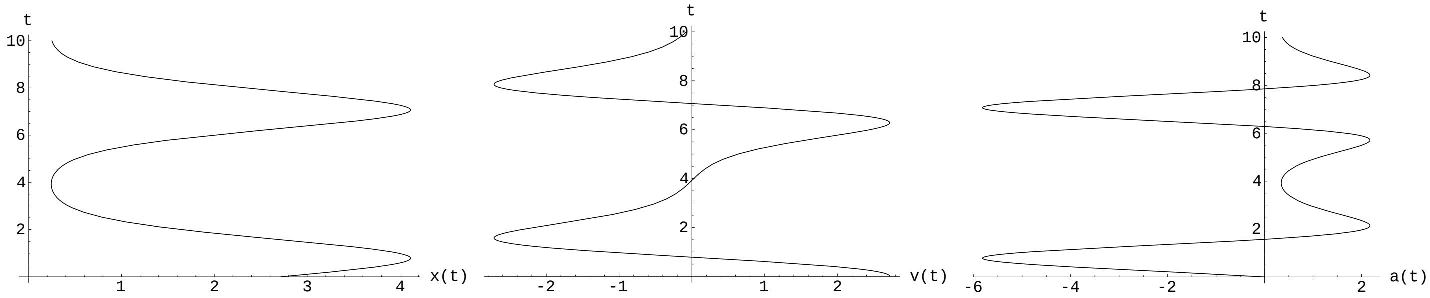
1 ニュートンの運動の 3 法則

‘**物体の運動の様子** $\vec{r}(t)$ **は, 物体に加わる力によってきまる**.’

1.1 物理数学 I の復習

t: **時刻** , $\vec{r}(t)$: 3 **次元ベクトル**

$$\boxed{\textbf{位置}\ \vec{r}(t)} \ \underset{\longleftarrow}{\overset{\textbf{微分}}{\longrightarrow}}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\underset{\textbf{積分}}{} \ \boxed{\textbf{速度}\ \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)} \ \underset{\longleftarrow}{\overset{\textbf{微分}}{\longrightarrow}}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\underset{\textbf{積分}}{} \ \boxed{\textbf{加速度}\ \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t)}$$



$$x(t) = \mathrm{e}^{\cos t + \sin t}$$

1.2 第一法則 (慣性の法則)

佐本 3.2

物体は, ‘力’ の作用を受けないかぎり, 等速直線運動をする. (特に, 速度 $\vec{0}$ すなわち静止の場合もある)

$$\text{力}\vec{F} = \vec{0} \text{ ならば } \vec{v} = \text{一定}. \qquad \text{すなわち } \boxed{} \tag{1}$$

例: エアホッケーのパック, 電車の中の風船, 無重力状態の宇宙飛行士, 宇宙船.

例でないもの: 地面を転がるボール, 自転車, 自動車.

観測者は地面に固定されているとは限らない.

等速直線運動する電車, 飛行機, エレベータの中でもよい. 慣性系

$\boxed{}$ の中では成り立たない.

当面, このような状況は考えない. ‘慣性系’ のみを考える.

例題 1 板のうえで, ひもで結んだ重りを振り回す. ひもが切れると, 重りはどのような運動をするか.

1.3 第二法則 (ニュートンの運動方程式)

佐本 3.4

力の作用を受ける物体は, ある加速度で運動する.

加速度の向き: 力 $\vec{F}$ の向きに平行.

加速度の大きさ: 質量 m に反比例, 力 $\vec{F}$ の大きさに比例.

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} \quad \text{すなわち} \quad \boxed{\phantom{m\vec{a} = \vec{F}}} \tag{2}$$

成分で書く. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$. ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトル.)

$$m\frac{d^2x}{dt^2}(t) = F_x(t), \tag{3}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}(t) = F_y(t), \tag{4}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}(t) = F_z(t). \tag{5}$$

例題 2 質量 m の物体に重力 $\vec{F} = -mg\vec{k}$ がはたらいている. このとき, 物体の運動は,

$$\vec{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\vec{k} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0. \tag{6}$$

と書ける. これが第二法則を満たすことを示せ.

質量とは

質量の単位: kg (**キログラム**). **水** 1 **リットルの質量は** 1kg.

(慣性) 質量: $\boxed{}$

重さ: $\boxed{}$

$\boxed{\text{(慣性) 質量} \neq \text{重さ}}$

重力のないところでの, **質量の測定方法**: **同じ力を加えて**, **生じる加速度を比べる**.

力とは

ベクトル量. **重ねあわせが成り立つ**.

力の単位 $\boxed{\text{N(ニュートン)}}$

1kg **の物体にはたらくと**, 1m/s^2 **の加速度を与える力を** 1N **という**. 1N=1 m kg/s^2.

地球表面で質量 1kg **の物体にはたらく重力**: $1\ \text{kg} \times 9.8\ \text{m/s}^2 = 9.8\ \text{N}$=1kg **重**.

単位系

MKSA **単位系**: **長さ** m (Meter), **質量** kg (Kilogram), **時間** s(Second=**秒**), **電流** A(Ampère=**アンペア**) **で測る単位系**.

他の物理量は, **これらの組合わせで表す** (**組立単位**). **例**: 1N=1kg m/s^2.

1.4 第三法則 (作用 · 反作用の法則)

佐本 3.5

物体 1 が物体 2 に力 $\vec{F}_{12}$ を及ぼすとき, 物体 2 も物体 1 に力 $\vec{F}_{21}$ を及ぼす. その向きは反対, 大きさは同じ.

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad} \tag{7}$$

例: 銃の発射の反動. 地球とりんご (重力). 下敷と髪の毛 (電気力).

例題 3 体重 $40\ kg$ と $60\ kg$ の 2 人の宇宙飛行士が, 無重力状態で手をつないでいた. $40\ kg$ の宇宙飛行士が, $60kg$ の宇宙飛行士を, $2\ N$ の力で 3 秒間おした. 3 秒後の 2 人の宇宙飛行士はそれぞれ, どれだけの速さでどちら方向に進んでいるか.

1.5 きょうの quiz

1. 物理数学 I への感想, 物理数学 II への希望, きょうの授業に対する感想 (早すぎた, 遅すぎた, まだ習っていないことを習っているかのように扱っている, 他の授業と記号が違う, プロジェクター/黒板が見にくい, など) を何でも書いてください.
2. 最初に静止していた質量 10kg の物体に, 大きさと向きの一定の力を 1 分間加え続けたところ, 速さが 0.6m/s となった. この力の大きさを求めよ.
3. 質量 2 kg の物体を, 大きさ 2 N の力で一方向に押すとき, 物体の加速度はどれだけか. 同じ力で押し続けたとき, 10 秒後の速さと, 10 秒間に進んだ距離を求めよ.
4. 質量 m[kg] の物体が, $x(t) = \mathrm{e}^{\cos t + \sin t}$[m], $y(t) = 0, z(t) = 0$ の運動をしている. 時刻 t にこの物体に働いている力 $\vec{F}$ [N] を求めよ.

1.6 前回の quiz の解答例

答案は 1-508 前の引き出しで返却中 (添削はできません).

1. 略. 青いチョークは使うのやめます.
2. 力は一定なので, $m\vec{a} = \vec{F}$ より, $\vec{a} =$ 一定 の定加速度運動. 加速度 $\vec{a}$ と力 $\vec{F}$ の大きさは,

$$|\vec{a}| = (0.6 - 0)\mathrm{m/s}/60\mathrm{s} = 0.01\mathrm{m/s}^2, \tag{8}$$

$$|\vec{F}| = 0.01\mathrm{m/s}^2 \times 10\mathrm{kg} = 0.1\mathrm{kg\ m/s}^2 = 0.1\mathrm{N} \tag{9}$$

3. 運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$ より, 加速度は,

$$2\mathrm{N}/2\mathrm{kg} = 2\mathrm{kg\ m/s}^2/2\mathrm{kg} = 1\mathrm{m/s}^2. \tag{10}$$

定加速度運動なので, $t = 10\mathrm{s}$ での速さ $v(t)$ と位置 $r(t)$ は,

$$v(t) = \int_0^t a\ \mathrm{d}t' + v(0) = at = 1\mathrm{m/s}^2 \times 10\mathrm{s} = 10\mathrm{m/s}, \tag{11}$$

$$r(t) = \int_0^t at'\ \mathrm{d}t' + r(0) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\mathrm{m/s}^2 \times (10\mathrm{s})^2 = 50\mathrm{m}. \tag{12}$$

4. 加速度ベクトルを求めると, $\vec{a} = (x''(t), y''(t), z''(t)) = \left((1 - \cos t - \sin t - \sin 2t)\mathrm{e}^{\cos t + \sin t}, 0, 0\right)$. 運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$ より, 力 $\vec{F}$ は,

$$\vec{F} = \left(m(1 - \cos t - \sin t - \sin 2t)\mathrm{e}^{\cos t + \sin t}, 0, 0\right). \tag{13}$$

2 運動方程式

2.1 運動の第二法則

佐本 3.4

時刻 t での位置 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. 力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, 質量 m.

ニュートンの運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \vec{F}, \tag{14}$$

成分で書くと

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_x, \\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_y, \\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_z. \end{cases} \tag{15}$$

注: $\vec{F}$ は時間 t や位置 $x(t)$ の関数かも.

しばらく, 運動が x 方向に限られた場合を考えよう. $x(t)$ だけを考えよう.

2.2 力を受けない場合 (≈ 第一法則)

$$F_x = 0 \rightsquigarrow m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0. \qquad (16)$$

このような方程式 (未知関数 $x(t)$ に関する方程式で, 微分を含んでいるもの) を 微分方程式 という.

$x(t)$ を求める (微分を含まない式にする) ことを, 微分方程式を解く (微分方程式を積分する) という.

解き方の例

(16) の両辺を t で (不定) 積分.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C_1 \qquad (C_1 = C' - C : \text{積分定数}) \qquad (18)$$

もういちど両辺を t で積分.

$$x(t) = C_1 t + C_2 \qquad (C_2 =: \text{積分定数}) \qquad (20)$$

等速（直線）運動!

引き続き, 運動が x 方向に限られた場合を考えよう. $x(t)$ だけを考えよう.

2.3 一定の力を受ける場合

佐本 2.2

$F_x = f$(定数). 時間によらない.

運動方程式は

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = f(\text{定数}). \tag{21}$$

解き方の例

(16) の両辺を t で積分.

両辺をもういちど t で積分

等加速度運動!

t で微分して, もとに戻るか check しよう!

例題 4 (落体の運動) 質量 m の物体が鉛直方向にのみ運動している．鉛直上向きに x 軸をとる．重力 mg が下向きに働いている．

時刻 $t = 0$ で, $x = 0$ の位置から, 鉛直上向きに速さ v_0 で物体を打ち出したときの運動を求めよ．

解答例

答えは $x(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t.$ (26)

積分定数と初期条件

ニュートンの微分方程式を積分すると, 2 個の 積分定数 が現れる．これは, 微分方程式が 2 階であるためである．これら 2 個の積分定数は,

$$x(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 \tag{27}$$

のような, 2 個の 初期条件 から決定される (例えば,).

初期条件が与えられていないと, 運動はひとつには定まらない (積分定数が残る).

2.4 時間的に変化する力

例題 5 質量 m の物体が，力 $F_x(t) = f\mathrm{e}^{-t/\tau}$ を受けて運動している $(f, \tau > 0$, 定数$)$. 時刻 $t = 0$ で $x = 0$ に静止していた物体の運動を求めよ．とくに時刻 $t \to \infty$ での速度を求めよ．

$$x(t) = \boxed{} \tag{31}$$

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \boxed{} \tag{32}$$

2.5 きょうの quiz

1. 質量 m の物体が鉛直方向にのみ運動している．鉛直上向きに x 軸をとる．重力 mg が下向きに働いている．

   時刻 $t=0$ で, $x=0$ の位置から (適当な速度で) 打ち出された物体が, 時刻 $t=\tau$ に, $x=g\tau^2$ に到達したという．

   任意の時刻 t での物体の位置 $x(t)$ を, g, τ を使って表せ．

2. 質量 m の, 時刻 $t=0$ で $x=0$ に静止していた物体が, $t>0$ で, 力 $F_x(t)=\frac{f\tau^2}{(t+\tau)^2}$ を受けて運動する $(f, \tau > 0$, 定数$)$．

   $t>0$ での物体の運動を求めよ．

   [暇と興味のあるひとは: 時刻 $t\to\infty$ で, $x(t)$, $\frac{dx}{dt}(t)$ はどうなるか．]

2.6 前回の quiz の解答例

1. **運動方程式は**

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg. \tag{33}$$

2 **回積分すると**,

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2. \quad (C_1, C_2\text{は積分定数}) \tag{34}$$

初期条件より

$$0 = x(0) = -\frac{1}{2}g\cdot 0^2 + C_1\cdot 0 + C_2, \tag{35}$$

$$g\tau^2 = x(\tau) = -\frac{1}{2}g\cdot\tau^2 + C_1\cdot\tau + C_2 \tag{36}$$

より, $C_1 = \frac{3}{2}g\tau, C_2 = 0$. **よって**,

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{3}{2}g\tau t. \tag{37}$$

(**運動方程式と初期条件をみたすことを** check **しよう**).

2. **運動方程式は**

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{f\tau^2}{(t+\tau)^2}. \tag{38}$$

$(-\frac{1}{t+1})' = \frac{1}{(t+1)^2}$ に注意して,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{f\tau^2}{m}\frac{1}{(t+\tau)} + C_1. \tag{39}$$

$(\log(t+1))' = \frac{1}{t+1}$ に注意して,

$$x(t) = -\frac{f\tau^2}{m}\log(t+\tau) + C_1 t + C_2. \tag{40}$$

初期条件より,

$$0 = x(0) = -\frac{f\tau^2}{m}\log(0+\tau) + C_1 \cdot 0 + C_2. \tag{41}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -\frac{f\tau^2}{m}\frac{1}{(0+\tau)} + C_1. \tag{42}$$

よって, $C_2 = \frac{f\tau^2}{m}\log\tau, C_1 = \frac{f\tau}{m}$. けっきょく

$$x(t) = -\frac{f\tau^2}{m}\log\frac{t+\tau}{\tau} + \frac{f\tau}{m}t. \tag{43}$$

[いまは分からないかもしれない注: 途中で出てくる $\log$ (時間) のような形は本当はおかしい. だって, $\log(24$ 分$)$ っていくつ?]

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{f\tau}{m}. \tag{44}$$

2.7 微分方程式を解く練習

与えられた初期条件のもとで, **微分方程式を解いて**, $x(t)$ **を求めよ**.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 1 - 2t, \quad x(0) = 0, \tag{45}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \omega \cos(\omega t), \quad x(0) = 1, \quad (\omega(\text{オメガ}) > 0 \text{ は定数. よく角振動数を表すのに使われる.}) \tag{46}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 2 - \mathrm{e}^{-3t}, \quad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{47}$$

3 放物運動

佐本 2.4

3.1 力の働かないときの 3 次元の運動

時刻 t での位置 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$. 力 $\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$, 質量 m. ニュートンの運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)=\vec{F},\quad \text{成分で書くと}\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=F_x, \\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t)=F_y, \\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t)=F_z. \end{cases} \tag{48}$$

$$\text{力が働かない} \Longleftrightarrow \vec{F}=(F_x,F_y,F_z)=(0,0,0) \rightsquigarrow \begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=0, \\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t)=0, \\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t)=0. \end{cases} \tag{49}$$

成分ごとに 2 回積分して,

$$\begin{cases} x(t)=v_{x0}t+x_0, \\ y(t)=v_{y0}t+y_0, \\ z(t)=v_{z0}t+z_0, \end{cases} \quad \text{別の書き方} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{pmatrix}t+\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \boxed{} \tag{50}$$

等速直線運動 $v_{x0},v_{y0},v_{z0},x_0,y_0,z_0$ は積分定数.

$\vec{v}_0=(v_{x0},v_{y0},v_{z0})$ は $\boxed{}$ $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ は $\boxed{}$

3.2 重力のもとでの 3 次元の運動

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -mg) \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = v_{x0}t + x_0, \\ y(t) = v_{y0}t + y_0, \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t + z_0. \end{cases} \tag{51}$$

積分定数 $v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0, z_0$. 2 **階** $\times$ 3 **次元** $=$ 6 **個**.

座標系の原点を変え, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ **としても一般性を失わない**. ($x(t) - x_0$ **を** $x_{\mathrm{new}}(t)$ **と思い直した**).

座標系を回して, $v_{y0} = 0$ **としても一般性を失わない**.

$$y(t) = 0, \tag{52}$$

$$x(t) = v_{x0}t, \tag{53}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t. \tag{54}$$

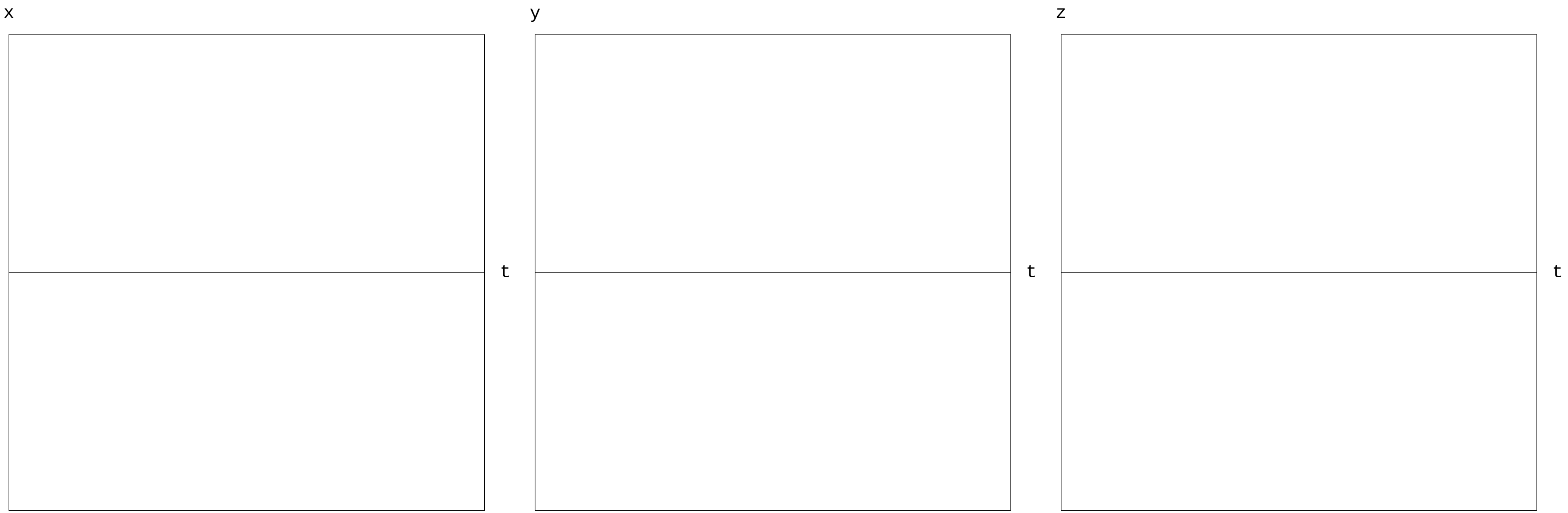
最高点 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ **となる時刻** $t = T_1$ **は**, $-gT_1 + v_{z0} = 0 \rightsquigarrow T_1 = v_{z0}/g$.

最高点の位置は, $x(T_1) = v_{x0}v_{z0}/g, z(T_1) = \frac{v_{z0}^2}{2g}$.

到達距離 **ふたたび** $z(t) = 0$ **となる時刻** $t = T_2$ **は**, $-\frac{1}{2}gT_2^2 + v_{z0}T_2 = 0 \rightsquigarrow T_2 = 2v_{z0}/g$.

到達距離は $\boxed{}$.

運動の様子



例題 6 地上から，角度 θ の方向に初速の大きさ v_0 でボールを投げたとき，その最高点の高さと落下点までの距離を求めよ．ただし，重力加速度を g とする．

初速の大きさ v_0 が一定のとき，もっとも遠くまでボールが届くのは，θ がどのような値のときか．

例題 7 地上から，a 離れた壁に向けて初速の大きさ v_0 でボールを投げる．角度 θ の方向に投げたときに，ボールがあたる点の高さを求めよ．ただし，重力加速度を g とする．

例題 8 地上から，角度 $\pi/6$ の方向に初速の大きさ v_0 でボールを投げる．水平に a だけはなれた位置にある，高さ h の壁を越えるためには，初速の大きさ v_0 はどれだけ以上である必要があるか．ただし，重力加速度を g とする．壁の高さは，$h < a/\sqrt{3}$ を満たす．

例題 9 (難) 地上のある点から初速の大きさ v_0 でボールを投げる．距離 a だけ離れた，高さ h の壁を越えさせるためには，v_0 は最小でもどれだけである必要があるか．

例題 10 (難) 高さ h の塔の上から，初速の大きさ v_0 でボールを投げる．地面のどの範囲に届くか．

(x, z) 空間での運動の軌跡を考えよう.

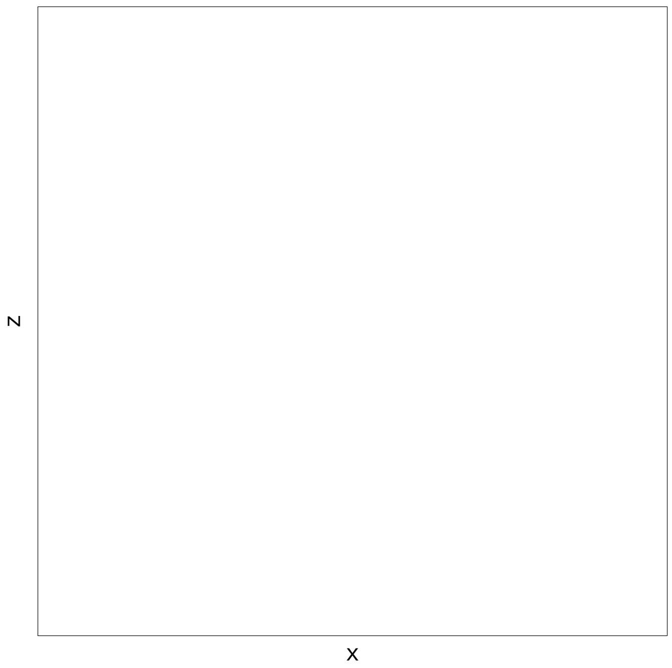
(53),(54) **から** t **を消去.**

$$z(t) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x(t)}{v_{x0}} \right)^2 + v_{z0} \left(\frac{x(t)}{v_{x0}} \right). \tag{55}$$

平方完成 $\rightsquigarrow$

$$z(t) = \boxed{} \tag{56}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{x0}^2} (x(t) - x_{\mathrm{m}})^2 + z_{\mathrm{m}} \tag{57}$$



放物線!

最高点 $(x_{\mathrm{m}}, z_{\mathrm{m}}) = (\frac{v_{x0} v_{z0}}{g}, \frac{v_{z0}^2}{2g})$.

落下点 $(2x_{\mathrm{m}}, 0)$.

小テストのお知らせ

物理数学 II **の小テストを**, 11 **月** 12 **日**, 12 **月** 3 **日 の** 2 **回行ないます**.

最終的な成績は,

$$(\textbf{出席}+\mathrm{quiz}):\textbf{小テスト}\ 1:\textbf{小テスト}\ 2:\textbf{期末試験} = 10 : 20 : 20 : 50 \tag{58}$$

で決定します.

11 **月** 12 **日の試験の範囲は**, **運動方程式**, **落体の運動**, **放物運動 です**.

3.4 例題の略解

例題 7

ボールを原点から $t=0$ に投げるとする. 壁の方向を x 軸にとると, 壁にボールが当たる時刻 $t=T_1$ は,

$$x(T_1) = v_{0x} \times T_1 = (v_0 \cos\theta) \times T_1 = a \text{ すなわち } T_1 = a/(v_0 \cos\theta). \tag{59}$$

時刻 $t=T_1$ でのボールの高さは,

$$z(T_1) = -\frac{1}{2} g T_1^2 + v_{0y} T_1 = a \tan\theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{a}{v_0 \cos\theta} \right)^2 . \tag{60}$$

例題 8

上の例題で, $\theta = \pi/6$ としたときに,

$$z(T_1) = a \tan\theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{a}{v_0 \cos\theta} \right)^2 > h \tag{61}$$

であればよいから, 不等式を v_0 について解いて,

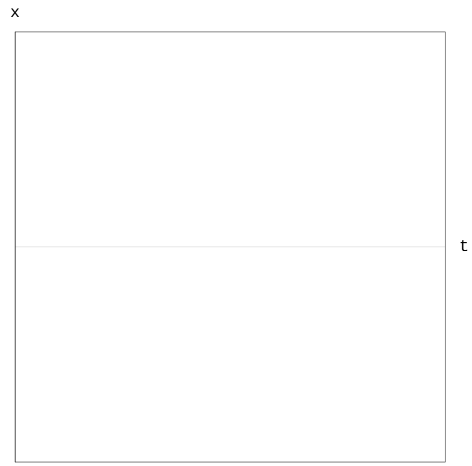
$$v_0 > \sqrt{\frac{2ga}{\sqrt{3} - \frac{3h}{a}}} \tag{62}$$

5 空気抵抗のある場合の運動

5.1 空気抵抗のみがある場合

物体の 空気抵抗 は, 向きは速度 $\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ と逆, 大きさは速度 $\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ に比例.

$$\text{空気抵抗の力}\quad \vec{F} = -k\vec{v}(t).\quad k\ \text{は正の比例定数} \tag{63}$$



空気抵抗だけを受ける, 1 次元の運動を考えよう. (例えば, 宇宙船内で物を投げたときの 1 次元の運動). 質量を m とすると運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{64}$$

$v(t) = v_x(t)$ に対して,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{k}{m}v(t). \tag{65}$$

[注: 運動方程式に, $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ のみで $x(t)$ が入ってなければ, $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおいて, まず $v(t)$ を求める.]

微分すると自分の $-k/m$ 倍になる関数って何?

(66)

積分して　(67)

5.2 (変数分離型) 微分方程式

次の性質を満たす関数 $x(t)$ **を求めよ**.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t), \qquad \text{初期条件 } x(0) = 4. \tag{68}$$

$x(t) = 4\mathrm{e}^{2t}$.

この解き方を 変数分離法 **といい**,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)g(t) \tag{69}$$

のような形 (変数分離形) **のときに使える**.

例題 11　次の微分方程式を，それぞれ，初期条件のもとで解け．

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x, \quad x(0) = 2. \tag{70}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2x, \quad x(0) = 2. \tag{71}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x^2, \quad x(0) = 2. \tag{72}$$

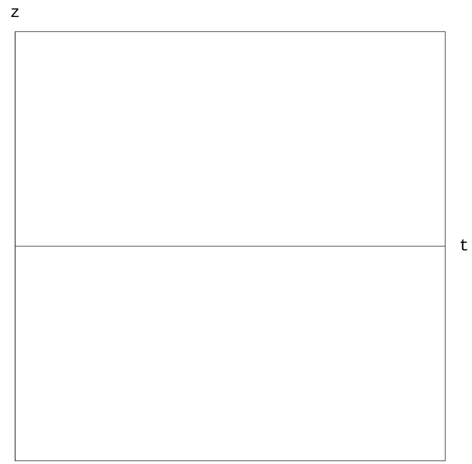
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -1 - x, \quad x(0) = 2. \tag{73}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = 1, \quad x(0) = 2. \tag{74}$$

5.3 空気抵抗のある場合の落下運動

鉛直上向きに z **軸をとる．質量** m**．運動方程式は**

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg - k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \tag{75}$$



あるいは, $v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ **に対して**,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -g - \frac{k}{m}v(t). \tag{76}$$

こ
れを解こう.

$$v(t) = \boxed{} \tag{77}$$

$t \to \infty$ **で** $v(t) \to -mg/k$. **これを終端速度という**. $0(= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)) = -g - \frac{k}{m}v(t)$ **を解いても得られる**.

$$z(t) = C_2 - \frac{mg}{k}t + C_1 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{78}$$

例題 12 **質量 m の物体を, 時刻 $t=0$ に, 位置 z_0 から, 鉛直上方に初速 v_0 で打ち出した. 物体には, 重力 (重力加速度は v) と, 速度に比例する空気抵抗 (比例定数 k) がはたらいている. 物体の運動を求めよ.**

5.4 例題の略解

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x, \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = C\mathrm{e}^{t}, \quad C = 2. \tag{79}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2x, \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = C\mathrm{e}^{-2t}, \quad C = 2. \tag{80}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x^2, \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = \frac{1}{x+C}, \quad C = 1/2. \tag{81}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -1-x, \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = -1 + C\mathrm{e}^{-t}, \quad C = 3. \tag{82}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = 1, \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = \tfrac{1}{2} + C\mathrm{e}^{-2t}, \quad C = \tfrac{3}{2}. \tag{83}$$

小テスト 1 の解答の訂正

運動方程式

$$x(t) = t^2 + C_1 t + C_2, \quad C_1 = -3, C_2 = 3. \tag{3}$$

落体の運動 3.

$$z(\tfrac{v_0}{g}) = \frac{v_0^2}{2g} + z_0. \tag{11}$$

小テスト 2 の日程の変更

12/3(月) $\longrightarrow$ 12/10(月) と変更させてください.

この変更で不都合が生じる人は申し出てください. 不利にならないよう考慮します.

なお, 試験範囲は, 少なくとも,

- 変数分離型微分方程式,
- 空気抵抗 and/or 重力のもとでの運動,
- 斜面にそう運動

を含みます.

5.5 重力と空気抵抗のもとでの運動

質量 m の物体を考える．鉛直上向きに z 軸，水平方向に x 軸をとる．
z 軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_z$ とかくと，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\vec{e}_z - k\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t) \tag{84}$$

成分で書いて，

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t), \tag{85}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg - k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \tag{86}$$

あるいは，

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(t) = -\,kv_x(t), \tag{87}$$

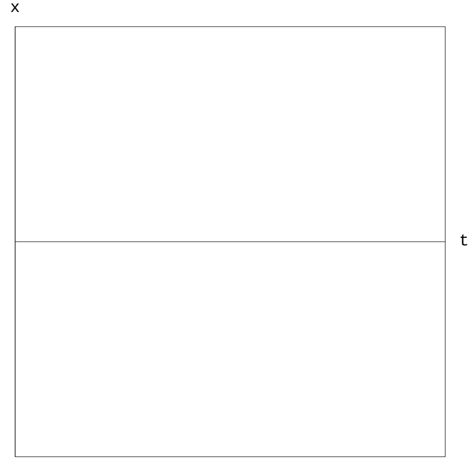
$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}(t) = -\,mg - kv_z(t). \tag{88}$$

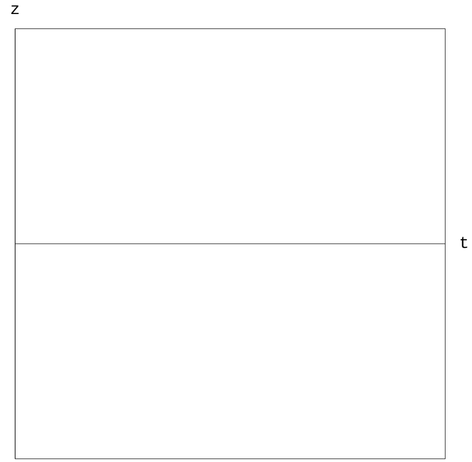
各々解けばよい．

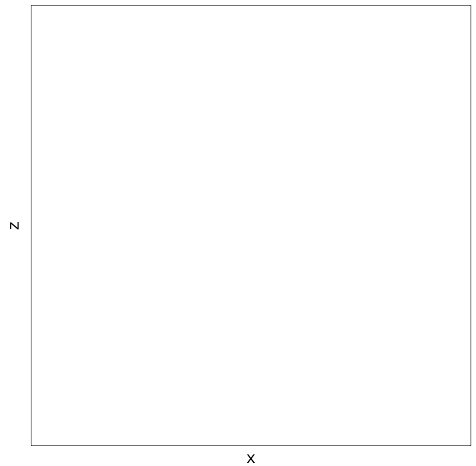
$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}, \tag{89}$$

$$z(t) = C_3 - \frac{mg}{k}t + C_4\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{90}$$

終端速度は







例題 13 通常，空気抵抗の力の大きさは，速度に比例するが，仮に，速度の *2* 乗に比例する空気抵抗と重力とを受ける物体があったとする．時刻 $t=0$ で，物体を鉛直下向きに速度 $v_0(<0)$ で発射する．運動方程式をたて，解いて，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ $(t>0)$ を求めよ．終端速度 v_∞ はどれだけか．質量を m，比例定数を k とする．

運動方程式は，

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{91}$$

問題の運動では，常に $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) < 0$ であるので，

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -g + \frac{k}{m}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 \times (+1) \tag{92}$$

あるいは $v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -g + \frac{k}{m}v(t)^2 \tag{93}$$

を解けばよい．変数分離形なので，

$$\frac{1}{v^2 - \frac{mg}{k}}\mathrm{d}v = \frac{k}{m}\mathrm{d}t \tag{94}$$

ここで **部分分数展開**

$$\boxed{} \tag{95}$$

に注意すると,

$$\int \frac{1}{2\sqrt{mg/k}}\left(\frac{1}{v-\sqrt{mg/k}}-\frac{1}{v+\sqrt{mg/k}}\right)\mathrm{d}v = \frac{k}{m}\int \mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2\sqrt{mg/k}}\left(\log|v-\sqrt{mg/k}|-\log|v+\sqrt{mg/k}|\right) = \frac{k}{m}(t-t_0) \quad (t_0\ \text{は積分定数})$$

$$\log\left|\frac{v(t)-\sqrt{mg/k}}{v(t)+\sqrt{mg/k}}\right| = 2\sqrt{kg/m}(t-t_0)$$

$$\frac{v(t)-\sqrt{mg/k}}{v(t)+\sqrt{mg/k}} = C\mathrm{e}^{2\sqrt{kg/m}\cdot t} \quad (C\ \text{は積分定数})$$

初期条件 $v(0)=v_0$ より, $C = \boxed{}$, $\quad v(t) = \boxed{}$ (96)

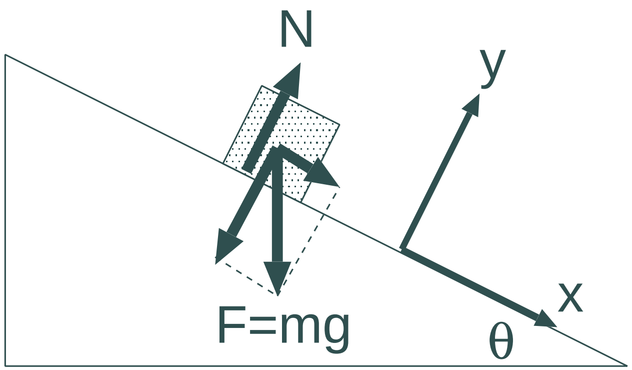
終端速度 $v_\infty = \sqrt{mg/k}$ (これは $\boxed{}$ からも求まる) (97)

4 斜面に沿う運動

佐本 4.1

水平から θ だけ傾いたなめらかな斜面をすべる物体 (質量 m).

運動方程式 (はたらく力は, $\vec{F}$: 重力, $\vec{N}$: 垂直抗力.)



$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} + \vec{N}. \tag{98}$$

成分で書くと,

$$\boxed{} \tag{99}$$

$$\boxed{}. \tag{100}$$

$\rightsquigarrow$

$$x(t) = \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2 + v_{x0}t + x_0, \tag{101}$$

$$y(t) = v_{y0} + y_0 = 0. \tag{102}$$

垂直抗力の大きさは,

$$N = mg\cos\theta \tag{103}$$

きょうの quiz

1. 通常, 空気抵抗の力の大きさは, 速度に比例するが, 仮に, 速度の 3 乗に比例する空気抵抗を受ける物体があったとする. 物体が他に力を受けない場合の運動を運動方程式を解いて求めよ (という意味は, $v(t)$ を積分定数の入ったままの形で求めよ). 質量を m, 比例定数を k とする.

   また, 重力 $-mg$ を受けて落下するときの終端速度を求めよ.

力学 ($\simeq$ 物理数学 II) の問題の解き方

1. 問題の設定を読んで, 物体の運動が何次元でおきるか考える.

2. 運動方程式を次元の数だけたてる. 左辺は, $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, $m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$ など. 右辺は, その方向の力.

   この段階では, 初期条件は使わない. 力と初期条件を混同しない.

   力は, 具体的な形が式で与えられていることもあるし, 重力, 空気抵抗の力, ばねの力です, とだけ書いてあって, 形は (物理的な知識から) 自分で考えなくてはならないこともある.

3. 初期条件を書く. 特定の時刻の, 位置, 速度, を与えているのが初期条件. ない場合は気にしない.

   特定の時刻の加速度は初期条件ではないそれは, 力から運動方程式を通じて決まる.

4. このステップは数学. 微分方程式を解いて $x(t), \ldots$ を求める. 次元の数 $\times 2$ 個の積分定数が残るはず.

5. このステップも数学. 初期条件を使って, 積分定数を決める. 初期条件がなければ, 積分定数のまま残しておく.

   運動を求めよ, というのでおしまいの問題だったら, このステップはない.

6. このステップは物理数学 I. 求まった $x(t)$ から, 問いに答える (壁を越えるか?, 最高の高さは? 等)

quiz の解答

1. 1 次元の運動なので, 時刻 t の座標を $x(t)$ とする.
2. 運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = k\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right|^3 \times \left\{\begin{array}{ll} (-1) & (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) > 0) \\ (+1) & (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) < 0) \end{array}\right\} = -k\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^3. \tag{104}$$

3. (初期条件はない)
4. $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおいて,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{k}{m}v(t)^3. \tag{105}$$

これは変数分離形.

$$\int \frac{1}{v^3}\mathrm{d}v = -\int \frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{v^2} = -\frac{k}{m}t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$v(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2k}{m}t - 2C}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2k}}\frac{1}{\sqrt{t + C_1}} \overset{t\to\infty}{\to} v_\infty = 0. \quad (C_1 = -\frac{m}{2k})$$

$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ なので, 両辺積分して,

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{m}{2k}} \times 2 \times \sqrt{t + C_1} + C_2. \tag{106}$$

5. (初期条件はないので C_1, C_2 はそのまま)

6. (問いはないが, 例えば $t \to \infty$ での速度をきかれたら, 0).

(ここからは, 別の問題設定)

重力 mg が働くとき,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -g - \frac{k}{m} v(t)^3. \tag{107}$$

となり, これは簡単には解けないが, 左辺$=0$ とおいて終端速度 v_∞ を求めると,

$$v_\infty = -\left(\frac{mg}{k}\right)^{1/3} \tag{108}$$

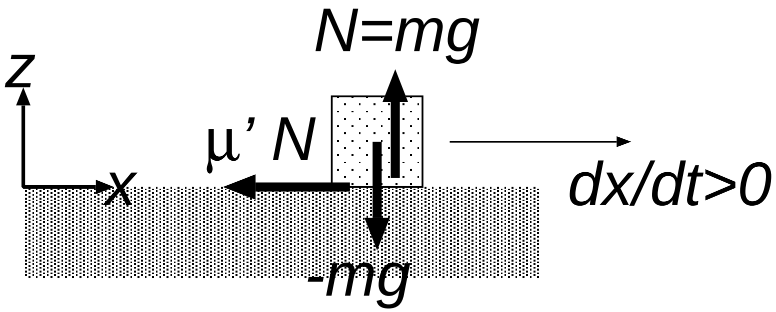
となる.

6 摩擦力

佐本 4.3

力を受けずに, なめらかでない (=粗い) 面上を運動する物体は, だんだん速さが遅くなり, 最後は止まってしまう. これは, ニュートンの第 1 法則に反するように見えるが, 実は, 粗い面が物体に, 摩擦力 (動摩擦力) を及ぼしているためである.

動摩擦力は, 速さを減らすようにはたらき, 大きさは, 垂直抗力 N に比例する. 比例定数 μ' は 動摩擦係数 と よばれ, 面の性質, 物体と面の接する面積などによってきまる.



$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{cases} -\mu' N & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) > 0\right) \\ 0 & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 0\right) \\ +\mu' N & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) < 0\right) \end{cases} \tag{109}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{} \qquad \boxed{} \tag{110}$$

N: 垂直抗力 (面が物体に及ぼす力)

例題 14 水平な粗い面の上をすべる質量 m の物体を考える．水平方向に x 軸，鉛直方向に z 軸を取る．時刻 $t=0$ に初速度 $(v_x, v_z) = (v_0, 0), v_0 > 0$ で原点から水平に物体を発射したところ，一直線上を運動した．物体にはたらく力は重力と動摩擦力だけだった．水平，鉛直それぞれの方向の運動方程式をたて，時刻 $t=0$ 以降の物体の運動を求めよ．特に，物体が静止するまでに進む距離を求めよ．ただし，物体と面の間の動摩擦係数を μ' とする．

垂直抗力の大きさを N として，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,\mu' N \tag{111}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg + N \tag{112}$$

初期条件は，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0, x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 0, z(0) = 0.$

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\mu' g \tag{113}$$

$$\text{**積分すると**}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\mu' g t + C_1, \qquad x(t) = -\frac{1}{2}\mu' g t^2 + C_1 t + C_2. \quad (C_1, C_2 \text{ **は積分定数**}) \tag{114}$$

$$\text{**初期条件より**}, \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{115}$$

物体が静止する時刻 $t = T$ は $\boxed{\qquad\qquad}$ **から決まり**，$T = \frac{v_0}{\mu' g}$．**それまでに物体の進んだ距離は**，

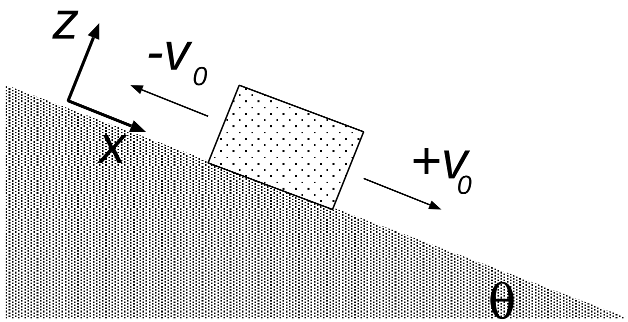
$$x(T) - x(0) = \frac{v_0^2}{2\mu' g}. \tag{116}$$

佐本 4.3, 4.2

例題 15 **水平から角度 θ だけ傾いた粗い面の上をすべる質量 m の物体を考える. 図のように, 斜面と平行な方向に x 軸, それと垂直な方向に z 軸を取る.**

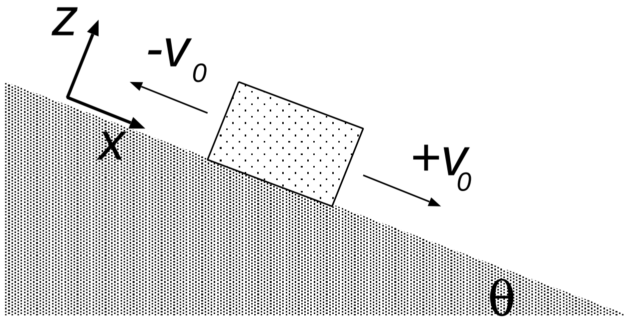
時刻 $t=0$ に初速度の大きさ v_0 で物体を斜面にそって下向きに発射した. x, z それぞれの方向の運動方程式をたて, 時刻 $t=0$ 以降の物体の運動を求めよ.

特に, 物体が斜面の途中で止まるための場合の, θ に対する条件を求めよ. 斜面は十分長いとする. 物体と面の間の動摩擦係数を μ' とする.



quiz

前の問いで, 物体を斜面にそって上向きに発射した場合の運動を求めよ. 特に, 物体が止まるまでに登る高さを求めよ.



注: 静止摩擦力

上では, 物体が動いている状況を考えた.

一方, 粗い面上に止まっている物体は, 小さい力で押しても動き出さない. これは, 加えた力と反対方向に 静止摩擦力 が働くためである.

静止摩擦力の大きさは, 最大でも μN である. ここで μ は 静止摩擦係数 とよばれる比例係数. 最大静止摩擦力より大きな力を加えて初めて, 物体は動き始める.

静止摩擦力は重要だが, ここでは扱わない.

通信欄, アンケートの一部への回答とコメント

(返事のほしい質問は直接きいた方が速いです．これ以外でも直接きいてくれればお答えします)

例題などの解答がほしい．復習用の問題/解答がほしい．

とばした例題は, 全員やっておくのが当然, という意味ではありません．が, 時間があればやってみてください．問題/解答が欲しければ, 指定した参考書の問題や, 力学の問題集 (例えば, 物理入門コース演習 例解力学演習 (岩波)) からとれば? なお, やった分の quiz の解答は配るつもりです．

板書とプリントの対応がとりずらい．やった範囲が分かりにくい．

認識しています．本当は十分大きな字で写るプロジェクターでやるのが理想的なのですが．部分的対策として, やっとところを残してそれ以外を削除したプリントを Web に置こうかと思ってます (ただし, 章番号や式番号は食い違ってしまう...)

... にもっと時間をかけてほしい

全般的に時間が不足しています．それぞれにもっと時間をかけられるとよいのですが, そのためにはどこかを削らなくてはなりません．調整してみます．(なお, この講義の内容は, 樋口が趣味で選んでいるのではなくて, 2 年生以降の科目に正しくつながるために, これだけの内容を説明するように, という決まりがあるのです．なので, 簡単に内容を減らすわけにはいかないのです)

成績のつけかたは．

変更ありません．(出席+quiz):小テスト 1(11/12):小テスト 2(12/10):期末試験=10:20:20:50.

例題 ?? の解答

垂直抗力を N **とすると**, **速度が** $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) > 0$ **なので**, **摩擦力は** $-\mu' N$ **となり**, **運動方程式は**,

$$m\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\mu' N + mg\sin\theta, \tag{117}$$

$$m\frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t^2}(t) = N - mg\cos\theta. \tag{118}$$

となる. **初期条件は**, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 0, x(0) = 0, z(0) = 0$. **ここで**, $z(t) \equiv 0$ **から** z **方向の方程式より** $N = mg\cos\theta$. **よって**,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta). \tag{119}$$

これを積分して,

$$x(t) = \frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t^2 + C_1 t + C_2. \qquad (C_1, C_2\text{は積分定数}) \tag{120}$$

初期条件より,

$$x(t) = \frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t^2 + v_0 t. \tag{121}$$

考え方 1

$t \to \infty$ **で**, $x(t) \to \infty$ **となるのは**,

$$\sin\theta - \mu'\cos\theta \geq 0 \tag{122}$$

のとき. **よって**, **途中で止まるのは**, $\sin\theta - \mu'\cos\theta < 0$ **すなわち**, $\tan\theta < \mu'$ **のとき**.

注. $\tan\theta < \mu'$ **のとき**, $x(t) \to -\infty$ **のように** (**坂を登ってように**) **見えるがこれはみかけ上**. **下の注意参照**.

考え方 2

> **止まる時刻** T **を**, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) = 0$ **より求めると**, $T = -\frac{v_0}{g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)}$. **これが** $T > 0$ **を満たさないと不適なので**, **途中で止まるのは**, $\tan\theta < \mu'$ **のとき**.

注. $\tan\theta < (>)\mu'$ **のとき**, $t = T$ **以後** (**以前**) **は**, $x(t)$ **は減少**, **すなわち坂を登っているように見える**. **が**, **これは見掛け上 のこと**. $t = T$ **の以後** (**以前**) **に** $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) \le 0$ **となり**, **摩擦力を**, $-\mu' N$ **としてたてた運動方程式が成立しなくなる**.

考え方 3

> **物体の受ける** x **方向の力は一定で**,
>
> $$g(\sin\theta - \mu'\cos\theta). \tag{123}$$
>
> **これが正ならいつかは止まるので**, **止まるのは**, $\tan\theta < \mu'$ **のとき**.

quiz の解答

運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}(t) = +\mu' N + mg\sin\theta, \tag{124}$$

$$m\frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t^2}(t) = N - mg\cos\theta. \tag{125}$$

($\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) < 0$ **なので**, **動摩擦力が** $+\mu' N$ **となることに注意**.), **初期条件は**, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -v_0 < 0$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 0$, $x(0) = 0, z(0) = 0$. **積分して**,

$$x(t) = \frac{1}{2}g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)t^2 - v_0 t. \tag{126}$$

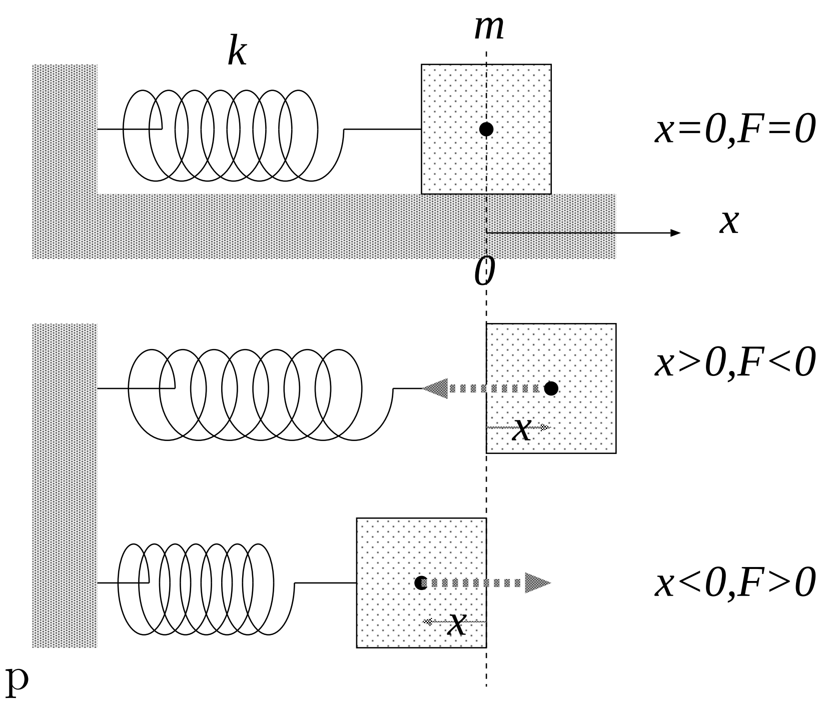
止まる時刻を $t = T$ **とすると**, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) = 0$ **を解いて**, $T = \frac{v_0}{g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)}$. **この間に登った高さは**,

$$-\sin\theta\cdot(x(T) - x(0)) = \frac{v_0^2\sin\theta}{2g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)} = \frac{v_0^2}{2g}\cdot\frac{1}{1 + \mu'\cot\theta}. \tag{127}$$

7 単振動 (調和振動)

佐本 4.4

バネの先についた物体 (質量 m) の運動を考えよう.



自然長: 力が加わっていないときのバネの長さ

変位: $x(t) =$ (変化後のバネの長さ) $-$ (自然長)

$$\text{バネの復元力}\quad F = -k \times x(t) \quad \text{(フックの法則)} \tag{128}$$

$k > 0$: バネ定数. バネの強さを表す.

大きさは変位に比例.

変位を小さくするようにはたらく (だからマイナス).

運動方程式は

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t). \tag{129}$$

すなわち

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega^2 x(t) = 0. \qquad (\omega = \sqrt{k/m}) \tag{130}$$

これを解こう.

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{131}$$

は解になっている.

なぜなら

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)) \tag{132}$$

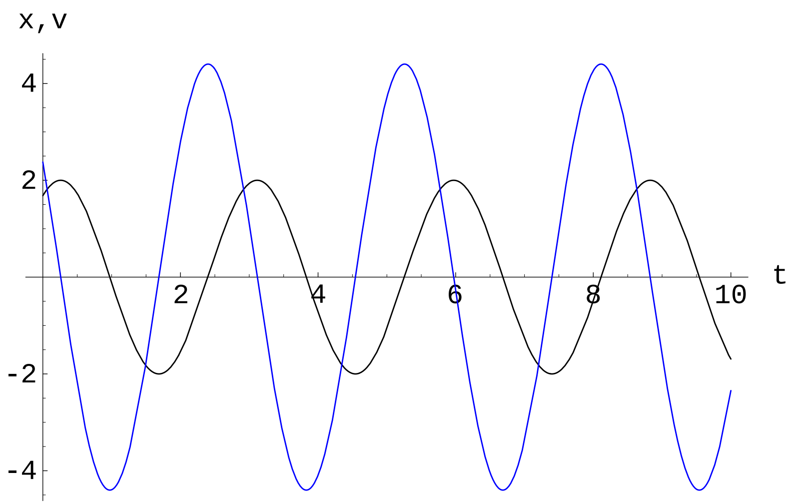
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-C_1\omega\sin(\omega t) + C_2\omega\cos(\omega t)) \tag{133}$$

$$= (-C_1\omega^2\cos(\omega t) - C_2\omega^2\sin(\omega t)) \tag{134}$$

$$= -\omega^2(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t))) = -\omega^2 x(t). \tag{135}$$

実は, これ以外の解はない (来年, 数理モデル基礎 I で学ぶ).

このような振動を $\boxed{\textbf{単振動 (調和振動)}}$ **という**.



$$\sin\theta_0 = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$$
$$\cos\theta_0 = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$$

を満たすように θ_0 **を定めると**,

$$\begin{aligned} x(t) =& C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) \\ =& \sqrt{C_1^2+C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos(\omega t) + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin(\omega t)\right) \\ =& \sqrt{C_1^2+C_2^2}(\sin\theta_0\cos(\omega t)+\cos\theta_0\sin(\omega t)) = (\textbf{加法定理}) = A\sin(\omega t+\theta_0). \end{aligned}$$

振幅 $A = \sqrt{C_1^2+C_2^2}$ [m]

位相 $\omega t + \theta_0$ [rad]

初期位相 θ_0 ($\tan\theta_0 = \frac{C_1}{C_2}$)

ω: (**単位時間に進む位相**)[rad/s]

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ ($\omega T = 2\pi$ **ごとに戻るから**.) [s]

$\nu = f = 1/T$ (**単位時間あたり何周期**?).[1/s]

(C_1, C_2), (A, θ_0) **はどちらも積分定数**.

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= A\sin\theta_0 \\ C_2 &= A\cos\theta_0 \end{aligned}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} A &= \sqrt{C_1^2+C_2^2} \\ \theta_0 &= \arctan\frac{C_1}{C_2} \end{aligned}\right.$$

例題 16 バネ定数 k **のバネの先に質量** m **の物体がついている**. **変位を** $x(t)$ **とするとき**, $x(0)=0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=1$ **だった**. $x(t)$ **を求めよ**.

quiz

1. **微分方程式**

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -8x(t) \tag{136}$$

を, **初期条件** $x(0) = 1$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -1$ **のもとで解け**.

2. **バネ定数** k **のバネの先に**, **質量** m **の物体がついている**. **時刻** $t = 0$ **に**, **バネを**, **自然長よりも長さ** ℓ **だけ引き延ばして静かに離した**. $t = 0$ **以降の運動を求め**, **グラフに書け**.

小テスト 2 のお知らせ

日時 12 **月** 10 **日** (**月**) 15:10–15:55

場所 1-107 **講義室**. **座席指定します**.

成績 **この試験の成績は**, **後期の成績** 100 **点のうち** 20 **点を占めます**.

試験範囲 **変数分離型微分方程式**. **重力**, **空気抵抗の力**, **摩擦力のもとでの運動**. **斜面に沿う運動**.