

## 前回の quiz の解答

## 1. 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (1)$$

の解は,  $x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$  で, いまは,  $\omega^2 = 8$  の場合である. よって解は,  $C_1, C_2$  を積分定数として,

$$x(t) = C_1 \cos(2\sqrt{2}t) + C_2 \sin(2\sqrt{2}t) \quad (2)$$

このとき,

$$\frac{dx}{dt}(t) = 2\sqrt{2}(-C_1 \sin(2\sqrt{2}t) + C_2 \cos(2\sqrt{2}t)). \quad (3)$$

初期条件より,

$$1 = x(0) = C_1 \cos(2\sqrt{2} \cdot 0) + C_2 \sin(2\sqrt{2} \cdot 0) = C_1,$$

$$-1 = \frac{dx}{dt}(0) = 2\sqrt{2} \cdot (-C_1 \sin(2\sqrt{2} \cdot 0) + C_2 \cos(2\sqrt{2} \cdot 0)) = 2\sqrt{2}C_2.$$

よって, 初期条件を満たす解は,

$$x(t) = \cos(2\sqrt{2}t) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(2\sqrt{2}t) \quad (4)$$

これで十分な答えになっているが, 次の形にも変形できる.

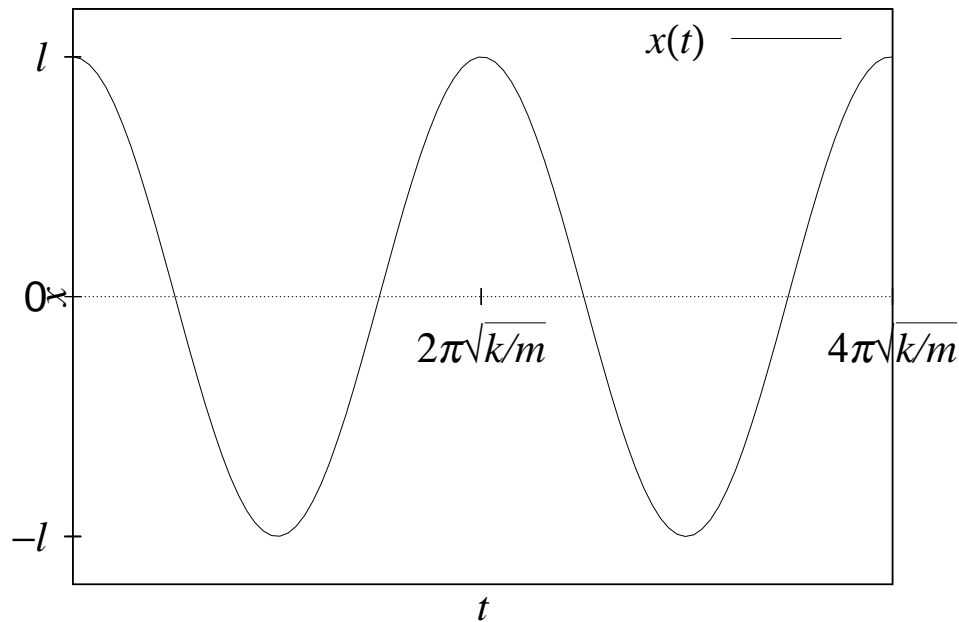
$$x(t) = \sqrt{\frac{9}{8}} \sin(2\sqrt{2}t + \theta_0), \quad \theta_0 = \arctan(-2\sqrt{2}). \quad (5)$$

2. 自然長からの変位を  $x(t)$  とすると, 運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -kx(t). \quad (6)$$

初期条件は,  $x(t) = \ell, \frac{dx}{dt}(0) = 0$ . この解は, 上と同様に,

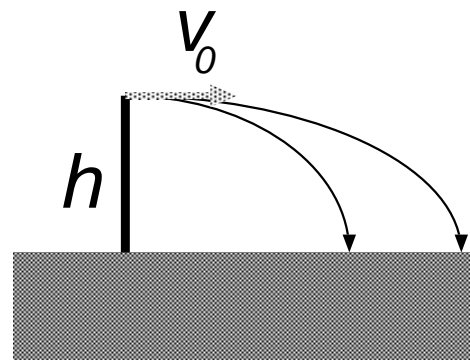
$$x(t) = \ell \cos(\sqrt{k/m} \cdot t). \quad (7)$$



## 問題

次のうち、人間がいちばん遠くまで投げられるのは?(大きさは同じ)

- 5kg 砲丸
- ソフトボール
- 発泡スチロールの玉



## 高校物理的解答

高さ  $h$  のところから、横方向に速度  $v_0$  で投げるとする。

地表に落下するまでの時間  $t$  は、落下運動の公式から、

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \text{ より } t = \sqrt{2h/g}. \quad (8)$$

横方向には、等速直線運動なので、この間に、 $v_0 \times \sqrt{2h/g}$  だけ進む。よって、どれも同じ距離だけ飛ぶ。

うそ.

人間の腕の構造上,  $v_0(\text{砲丸}) < v_0(\text{ソフトボール})$

だからソフトボールのほうが飛ぶ.

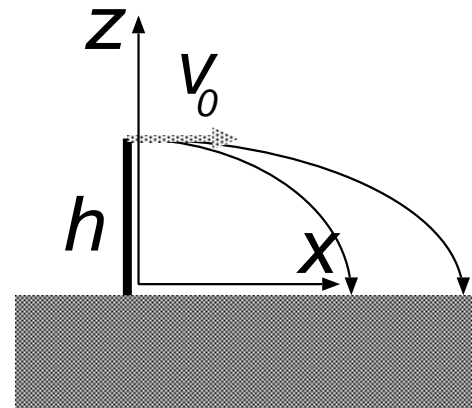
では発泡スチロールの玉は?  $v_0(\text{発泡スチロール}) = v_0(\text{ソフトボール})$

速度  $\vec{v}$  に比例する空気抵抗  $-k\vec{v}$  がはたらくとすると, 運動方程式は

$$(ma = F)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -k \frac{dx}{dt}(t), \quad (9)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2}(t) = -k \frac{dz}{dt}(t) - mg \quad (10)$$



初期条件は,  $x(0) = 0, z(0) = h, \frac{dx}{dt}(0) = v_0, \frac{dz}{dt}(0) = 0.$

**重要** 比例定数  $k$  は, 同じ 2 の物体なら同じ.

3 にはよらない.

(9) を解こう.  $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$  とおくと,

$$\frac{dv}{dt}(t) = -\frac{k}{m}v(t)$$

$$\left( \boxed{\times \text{間違い}} \int \frac{dv}{dt} dt = - \int \frac{k}{m} v dv \right)$$

$$\boxed{4} \quad \frac{1}{v} dv = -\frac{k}{m} dt$$

$$\boxed{5}$$

$$\int \frac{1}{v} dv = - \int \frac{k}{m} dt + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\log |v(t)| = -\frac{k}{m}t + C$$

$$|v(t)| = e^{-\frac{k}{m}t + C} = e^{-\frac{k}{m}t} e^C$$

$$v(t) = \pm e^C e^{-\frac{k}{m}t} = C_1 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

初期条件  $v(0) = v_0$  より,  $C_1 = v_0$ . もう一度積分して,

$$x(t) = \int v(t)dt = \int v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt = -\frac{mv_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + C_2 \quad (11)$$

初期条件  $x(0) = 0$  より,  $C_2 = +\frac{mv_0}{k}$ .

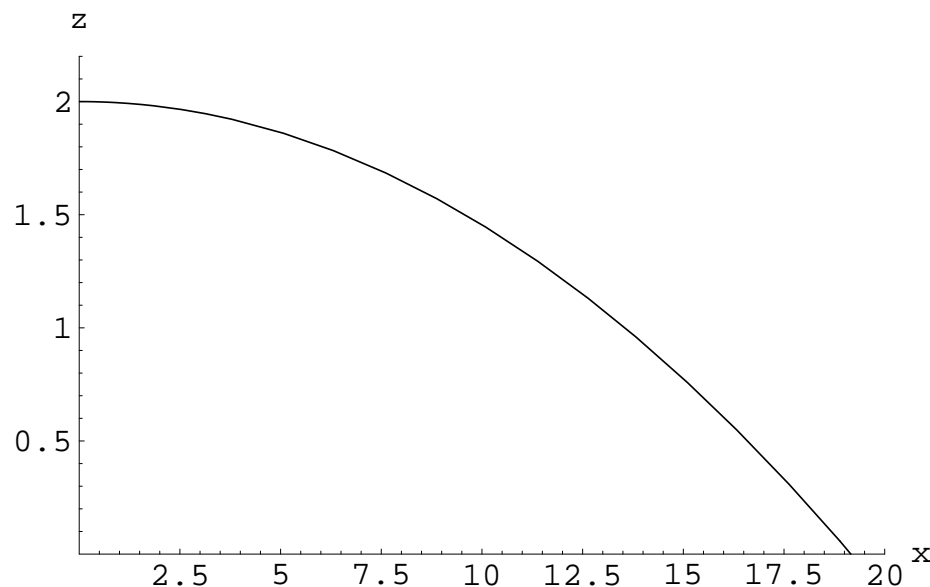
$$x(t) = \frac{mv_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \quad (12)$$

空気抵抗が無い場合とは, 少し違う考え方をしよう.  $h$  が十分大きければ (東京タワーの上から投げた!), 着地する時刻  $t$  は非常に大きいはず.

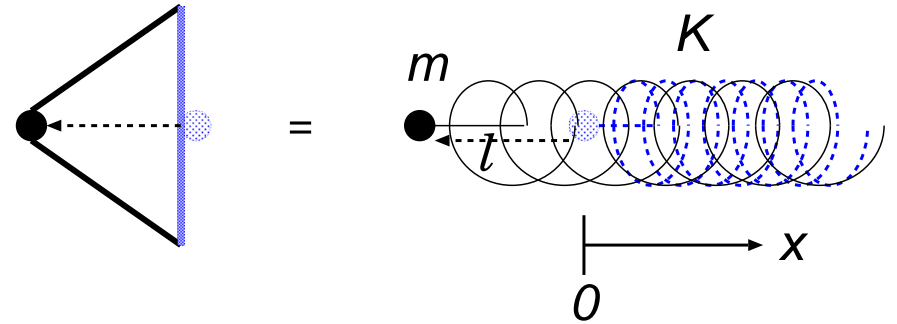
そこで,  $t \rightarrow \infty$  を考えよう.  $e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow 0$  より,

$$x(t) \rightarrow \boxed{6} \quad (13)$$

確かに,  $m$  が大きい方が遠くまで届く.



人間の手は不確か. パチンコで打ち出してみよう.  
バネ定数を  $K$ ,  $\ell$  だけ引き絞ってそっと  
手を放したとする. 運動方程式は



$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -Kx(t). \quad (14)$$

初期条件  $x(0) = -\ell$ ,  $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ . 先週やったように解くと,

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t\right) \rightarrow x(t) = -\ell \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t\right).$$

$x(T) = 0$  となった瞬間に, ボールはパチンコを離れ, 力を受けなくなる.

$$\text{その時刻は } \sqrt{\frac{K}{m}} T = \pi/2 \rightsquigarrow T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{K}}.$$

$$\text{その瞬間の速度 } v_0 = \frac{dx}{dt}(T) = \ell \sqrt{\frac{K}{m}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ell \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

飛ぶ距離 7



## 8 減衰振動と複素数

### 8.1 単振動の復習

バネ (バネ定数  $k$ ) の先についた, 質量  $m$  の物体の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -kx(t). \quad (15)$$

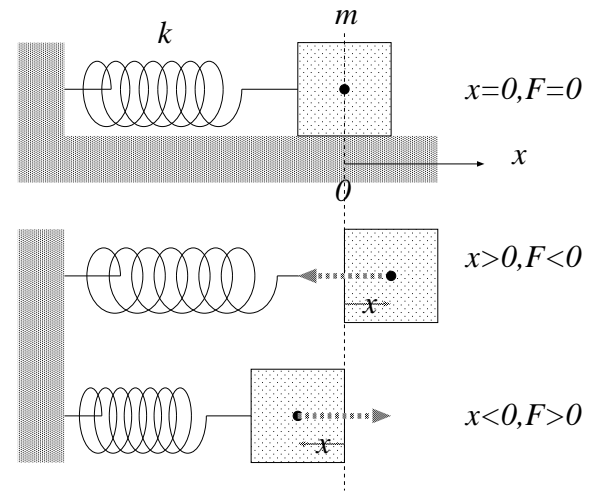
$m = k = 1$  と思うと,

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) + x(t) = 0.$$

解は  $x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$ .  $\frac{dx}{dt}(t) = -C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$ . (16)

初期条件  $x(0) = 1, \frac{dx}{dt}(0) = 0$  を課すと,  $C_1 = 1, C_2 = 0$ .

$$x(0) = C_1 = 1, \frac{dx}{dt}(0) = -C_2 = 0 \rightsquigarrow x(t) = \cos t. \quad (17)$$



## 8.2 空気抵抗を受けるバネ: 減衰振動

速度に比例する空気抵抗  $-c \frac{dx}{dt}(t)$  もある場合を考えよう.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -kx(t) - c \frac{dx}{dt}(t). \quad (18)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0. \quad (19)$$

このような運動を **減衰振動** という.

一般に,

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) + a \cdot \frac{dx}{dt}(t) + b \cdot x(t) = 0. \quad (a, b \text{ は定数}) \quad (20)$$

というタイプの微分方程式を考えよう.

## 例題 1

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 3 \cdot \frac{dx}{dt}(t) + 2 \cdot x(t) = 0. \quad x(0) = 1, \frac{dx}{dt}(0) = 0. \quad (21)$$

1

$$x(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad (22)$$

quiz 1 配った紙にやってね.

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 2 \cdot \frac{dx}{dt}(t) - 3 \cdot x(t) = 0. \quad x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) = 4 \quad (23)$$

### 8.3 虚数の指数関数

‘ $x(t) = e^{\lambda t}$ ’ とおく, は便利. 単振動にも使えないか?

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + x(t) = 0, \quad x(0) = 1, \frac{dx}{dt}(0) = 0 \quad (24)$$

は,  $a = 0, b = 1$  の場合. やってみよう.

$x(t) = e^{\lambda t}$  とおいてみる.

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

よって 
$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + x(t) = (\lambda^2 + 1)e^{\lambda t} = 0.$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda = \pm i \text{ (?????)}$$

**虚数単位**  $i = \sqrt{-1}$  は  $i^2 = -1$  を満たす. 複素数  $x + iy$  の  $i$ .  
 知らん顔して計算すると,

$$x(t) = D_1 e^{it} + D_2 e^{-it}. \quad (25)$$

は解. 初期条件より,

$$x(0) = D_1 e^{i0} + D_2 e^{-i0} = D_1 + D_2 = 1. \quad (26)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}(t)\right) = iD_1 e^{it} - iD_2 e^{-it} \text{ だから} \quad (27)$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = iD_1 e^{i0} - iD_2 e^{-i0} = iD_1 - iD_2 = 0. \quad (28)$$

ここで  $e^0 = 1$  を使った.

解いて,  $D_1 = D_2 = \frac{1}{2}$ .

この解は  $x(t) = \cos t$  だったはず.

$$x(t) = \cos t \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}. \quad (29)$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\sin t \stackrel{?}{=} \frac{i}{2}e^{it} - \frac{i}{2}e^{-it}. \quad (30)$$

したがって,

$$(\text{上}) + \frac{1}{i} \cdot (\text{下}) = \cos t + i \sin t \stackrel{?}{=} e^{it}. \quad (31)$$

## 8.4 オイラーの公式

気分のために  $t$  を  $\theta$  とかく.

定義. 実数  $\theta$  に対して

2

...

オイラーの公式

(32)

定義. 複素数  $z = a + i\theta$  ( $a$  と  $\theta$  は実数) に対して,

3

(33)

3年で関数論を学ぶと, これで 'よい' というのが心から納得できます.

性質. 複素数  $z = x + iy, w = u + iv$  に対して,

$$e^{z+w} = e^{x+iy+u+iv} = e^{(x+u)+i(y+v)} = e^{x+u} e^{i(y+v)} \quad (34)$$

$$= e^{x+u} (\cos(y+v) + i \sin(y+v)) = \cdots (\text{加法定理}) = e^x e^y e^{iy} e^{iv} = e^z \times e^w \quad (35)$$

**例題 2**  $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ ,  $z^2$ ,  $z^{100}$ ,  $1/z$  の実部, 虚部を求めよ.

4

$z = x + iy$  は足し算が得意.  $z = e^{a+i\theta}$  は掛け算が得意.



## 8.5 極表示

$x, y, r, \theta$  は実数,  $r \geq 0$ .

## 普通の表示 極表示

複素数  $z = x + iy = re^{i\theta}$

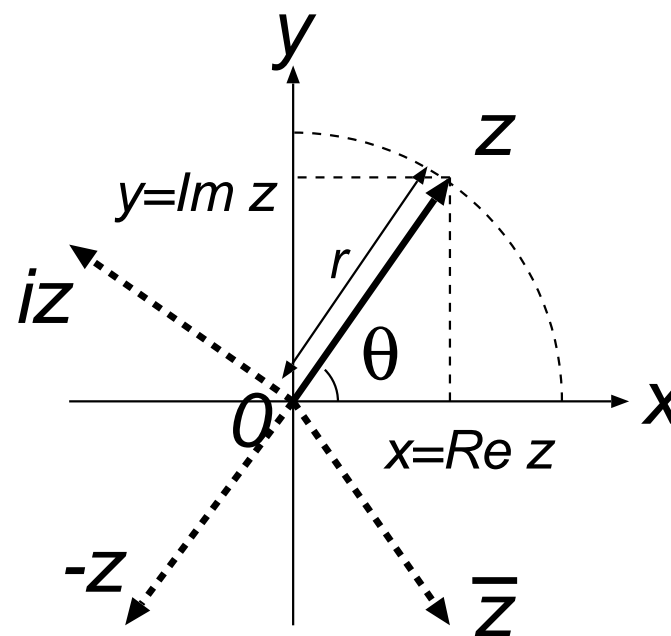
実部  $\operatorname{Re} z = x = r \cos \theta$

虚部  $\operatorname{Im} z = y = r \sin \theta$

絶対値  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r (\geq 0)$

偏角  $\arg z = \arctan \frac{y}{x} = \theta$

複素共役  $\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$



## いくつかの公式

(定義に戻ればすぐに導けるのでおぼえなくても OK).

$$z = x + iy = re^{i\theta}, \quad (x, y, r, \theta \text{ は実数.})$$

$e^z$  の性質.

$$e^{2\pi i} = 1, e^{\pi i} = -1. \quad (36)$$

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^x \quad (37)$$

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \quad \text{特に } \overline{e^{iy}} = e^{-iy}. \quad (38)$$

オイラーの公式を逆に解いたもの

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad (41)$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad (42)$$

複素共役,  $-1$  倍, 逆数.

$$\bar{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}, \quad (43)$$

$$-z = -r(e^{i\theta}) = re^{i(\theta+\pi)}, \quad (44)$$

$$1/z = (re^{i\theta})^{-1} = (1/r)e^{-i\theta} \quad (45)$$

微分積分

$$\frac{d}{dt} e^{zt} = ze^{zt}. \quad (39)$$

$$\int e^{zt} dt = \frac{1}{z} e^{zt} + C. \quad (40)$$

**例題 3** 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 4x(t) = 0. \quad x(0) = 1, \frac{dx}{dt}(0) = 1. \quad (46)$$

を,  $x(t) = e^{\lambda t}$  ( $\lambda$  は一般には複素数) とおくことによって解け.

## quiz 2

## 微分方程式を

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 16x(t) = 0, \quad x(0) = 4, \quad \frac{dx}{dt}(0) = -4. \quad (47)$$

を,  $x(t) = e^{\lambda t}$  ( $\lambda$  は一般には複素数) とおくことによって解け.

## お知らせ

小テスト 1,2 の追試のお知らせを掲示しています.

## 小テスト 2 解答訂正 (すみません).

問 2(2) 積分定数きめる前は  $\pm$  の可能性があります.

$$x(t) = \boxed{\pm}(-4C - 4t)^{-1/4} \rightsquigarrow \text{初期条件} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{16} - 4t\right)^{-1/4} = \pm 2(1 - \boxed{64}t)^{-1/4}$$

## 先週の quiz 2

$x(t) = e^{\lambda t}$  において代入すると,

$$(\lambda^2 + 16)e^{\lambda t} = 0 \quad (48)$$

よって,  $\lambda^2 + 16 = 0$  より  $\lambda = \pm 4i$  で, 解は

$$x(t) = C_1 e^{4it} + C_2 e^{-4it}. \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数}) \quad (49)$$

初期条件より,  $C_1 = 2 + \frac{i}{2}, C_2 = 2 - \frac{i}{2}$ . となり,

$$x(t) = (2 + \frac{i}{2})e^{4it} + (2 - \frac{i}{2})e^{-4it} \quad (50)$$

$\theta = \pm 4t$  と思ってオイラーの公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  を使うと,

$$\begin{aligned} x(t) &= (2 + \frac{i}{2})(\cos 4t + i \sin 4t) + (2 - \frac{i}{2})(\cos(-4t) + i \sin(-4t)) \\ &= \dots = (4 \cos 4t - \sin 4t) + i \times 0. \end{aligned} \quad (51)$$

## 9 減衰振動, 臨界制動, 過減衰

### 9.1 復習

速度に比例する空気抵抗  $-\gamma \frac{dx}{dt}(t)$  もある場合を考えよう ( $\gamma > 0$ , 定数. 今までよく  $k$  と書いてた).

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -k \cdot x(t) - \gamma \cdot \frac{dx}{dt}(t). \quad (52)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2}(t) + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0. \quad (53)$$

一般に,

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) + b \cdot \frac{dx}{dt}(t) + c \cdot x(t) = 0. \quad (b, c \text{ は定数}) \quad (54)$$

というタイプの微分方程式を解くには,  $x(t) = e^{\lambda t}$  とおいて  $\lambda$  をきめる. 虚数が出てきたら,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  ( $\theta$ : 実数. オイラーの公式).

## 例題 4

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 4 \cdot \frac{dx}{dt}(t) + 5 \cdot x(t) = 0. \quad x(0) = 1, \frac{dx}{dt}(0) = 0. \quad (55)$$

1

$$x(t) = e^{-2t} \times (1 \cdot \cos t + 2 \cdot \sin t). \quad (56)$$



## 9.2 特性方程式と解の分類

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + b \cdot \frac{dx}{dt}(t) + c \cdot x(t) = 0. \quad (b, c \text{ は定数}) \quad (57)$$

という微分方程式は,  $b, c$  の値に応じて異なるタイプの解を持つ.

$x(t) = e^{\lambda t}$  とおいて代入.

$$(\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0 \quad (58)$$

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (59)$$

これは  $\lambda$  をきめる 2 次方程式. . . . . 2.

$$\text{3} \quad D = b^2 - 4c. \quad (60)$$

解は,  $D$  の値によって分類される.

$D > 0$  のとき 2 実根.  $\lambda = \alpha, \beta$  ( $\alpha \neq \beta$ ,  $\alpha, \beta$  は実数).

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}. \quad (61)$$

$D < 0$  のとき 互いに複素共役な 2 複素根.  $\lambda = \mu \pm i\omega$ . ( $\mu, \omega$  は実数).

$$x(t) = C_1 e^{(\mu+i\omega)t} + C_2 e^{(\mu-i\omega)t} \quad (62)$$

$$= e^{\mu t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \quad (63)$$

$$= e^{\mu t} ((C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t) \quad (64)$$

$$= e^{\mu t} (D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t) \quad (65)$$

$D = 0$  のとき 重根.  $\lambda^2 + b\lambda + c = (\lambda + b/2)^2$ .  $\alpha = -b/2$  は実数.

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} .??? \quad (66)$$

積分定数が 1 個しかないのはおかしい。

重要:

4

も解. なぜなら

$$\frac{d}{dt}(t \times e^{\alpha t}) = \left(\frac{d}{dt}t\right)e^{\alpha t} + t\left(\frac{d}{dt}e^{\alpha t}\right) = (1 + \alpha t)e^{\alpha t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(t \times e^{\alpha t}) = \frac{d}{dt}[(1 + \alpha t)e^{\alpha t}]$$

= 5

$$= (\alpha + (1 + \alpha t)\alpha)e^{\alpha t} \text{ より}$$

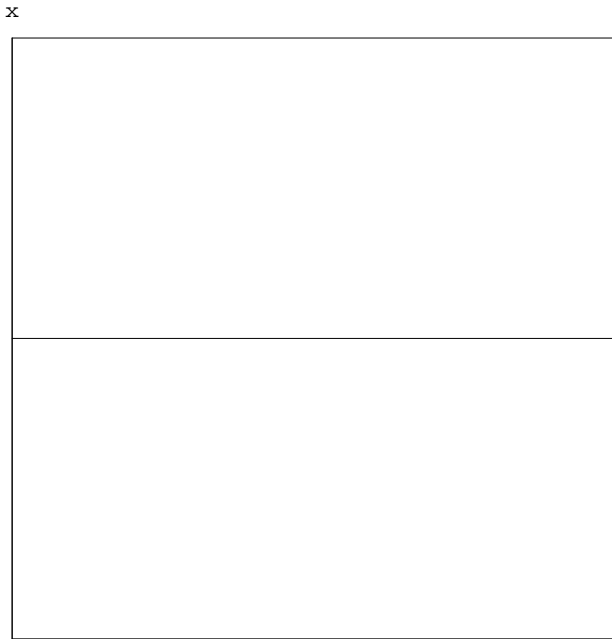
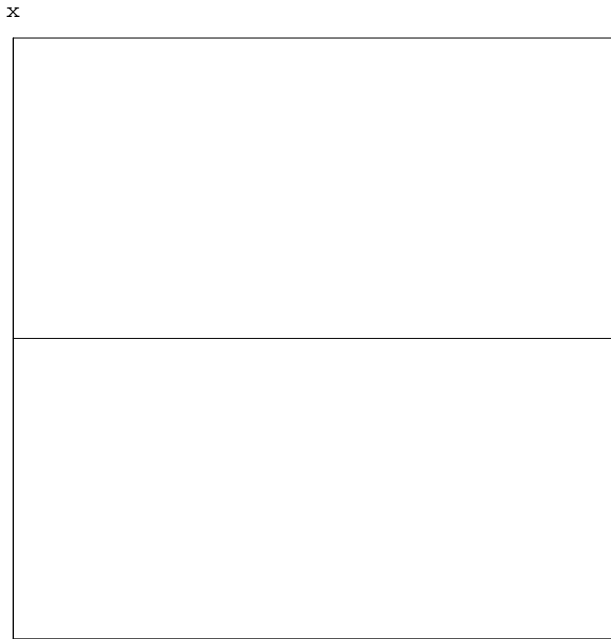
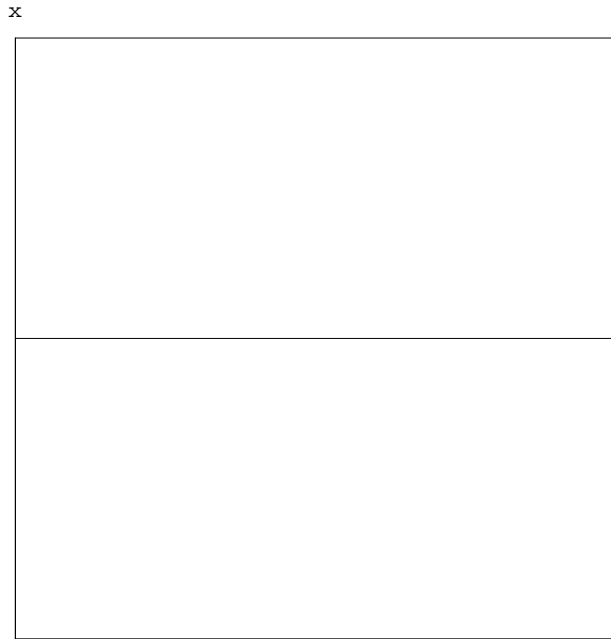
$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + b\frac{dx}{dt}(t) + cx(t) = [(\alpha + (1 + \alpha t)\alpha) + b(1 + \alpha t) + c]e^{\alpha t}$$

$$= [(\alpha^2 + b\alpha + c)t + (2\alpha + b)]e^{\alpha t}$$

$$= [0 \times t + 0]e^{\alpha t} = 0.$$

なぜなら,  $\lambda = \alpha$  は  $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  の解, また,  $\alpha = -b/2$  だから. この  
2つを加えたものも解で, 6

9.3  $D > 0, D < 0, D = 0$  の解の様子



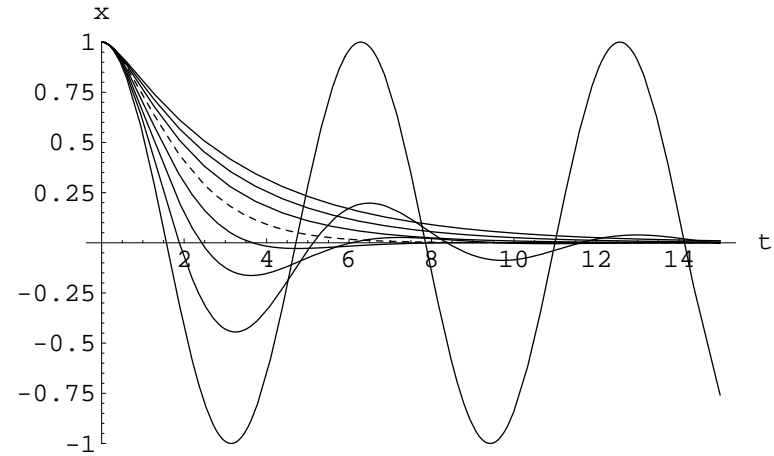
**9.4 過減衰, 減衰振動, 臨界制動**

速度に比例する空気抵抗  $-\gamma \frac{dx}{dt}(t)$  のあるバネ

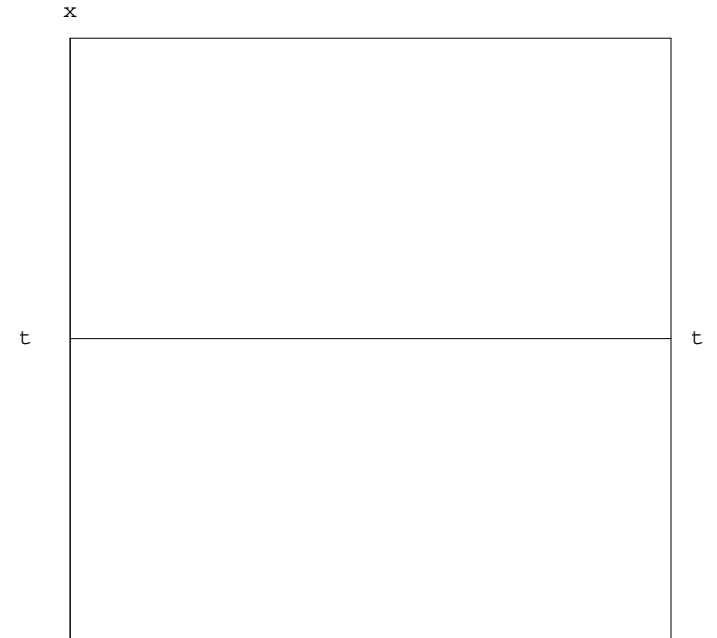
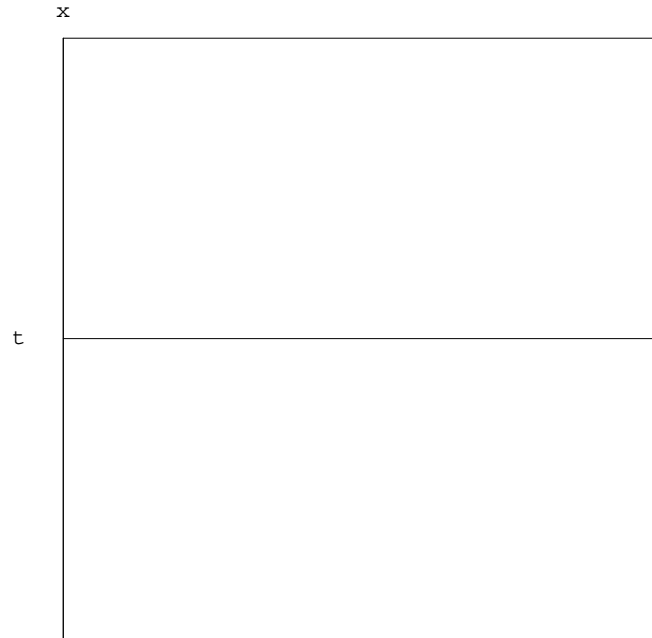
$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -kx(t) - \gamma \frac{dx}{dt}(t). \quad (67)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2}(t) + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0. \quad (68)$$

の場合には,  $k > 0, \gamma > 0$ . 特性方程式の判別式  $D = \frac{1}{m^2}(\gamma^2 - 4mk)$ .



- 過減衰  $D > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{mk} < \gamma$
- 臨界制動  $D = 0 \Leftrightarrow \gamma = 2\sqrt{mk}$
- 減衰振動  $D < 0 \Leftrightarrow 0 < \gamma < 2\sqrt{mk}$



quiz 1 配った紙にやってね.

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \frac{dx}{dt}(t) + 5 \cdot x(t) = 0. \quad x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) = 4. \quad (69)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 2 \cdot \frac{dx}{dt}(t) + x(t) = 0. \quad x(0) = 2, \frac{dx}{dt}(0) = 0. \quad (70)$$

## 先週の quiz

$$\bullet \quad \frac{d^2x}{dt^2}(t) + \frac{dx}{dt}(t) + 5 \cdot x(t) = 0. \quad x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) = 4. \quad (71)$$

特性方程式は  $\lambda^2 + \lambda + 5 = 0$ . よって,  $\lambda = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{19}i)$ . 解は

$$x(t) = C_1 e^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{19}i)t} + C_2 e^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{19}i)t}. \quad (72)$$

初期条件から積分定数  $C_1, C_2$  を決定する.

$$\frac{dx}{dt}(t) = C_1 \frac{-1+\sqrt{19}i}{2} e^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{19}i)t} + C_2 \frac{-1-\sqrt{19}i}{2} e^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{19}i)t}. \quad (73)$$

より,

$$(x(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 =) C_1 + C_2 = 0 \quad (74)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}(0) =\right) C_1 \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{19}i) + C_2 \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{19}i) = 4 \quad (75)$$



これを解くと,

$$C_1 = -C_2 = \frac{4}{\sqrt{19i}}. \quad (76)$$

よって,

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \frac{4}{\sqrt{19i}} (e^{\frac{1}{2}(+\sqrt{19i})t} - e^{\frac{1}{2}(-\sqrt{19i})t}) = e^{-\frac{1}{2}t} \frac{8}{\sqrt{19}} \sin \frac{\sqrt{19}}{2}t \quad (77)$$

$$\bullet \quad \frac{d^2x}{dt^2}(t) + 2 \cdot \frac{dx}{dt}(t) + x(t) = 0. \quad x(0) = 2, \frac{dx}{dt}(0) = 0. \quad (78)$$

特性方程式は  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ . これは重根  $\lambda = -1$  を持つので,  $e^{-t}$  の他に,  $t \times e^{-t}$  も解になっている. よって,

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}. \quad (79)$$

積分定数を  $C_1, C_2$  を初期条件から決定する.

$$\frac{dx}{dt}(t) = -C_1 e^{-t} + (C_2 - C_2 t) e^{-t} \quad (80)$$

より,

$$x(0) = C_1 e^0 + C_2 0 e^0 = C_1 = 2. \quad (81)$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = -C_1 e^0 + (C_2 - C_2 0) e^0 = -C_1 + C_2 = 0 \quad (82)$$

よって,  $C_1 = C_2 = 2$ .

$$x(t) = 2(1 + t)e^{-t}. \quad (83)$$

訂正. p.104(2002/01/07) すみません. ページごと以下と入れ替え  
てください.

## 9.5 過減衰, 減衰振動, 臨界制動

速度に比例する空気抵抗  $-\gamma \frac{dx}{dt}(t)$  のあるバネ

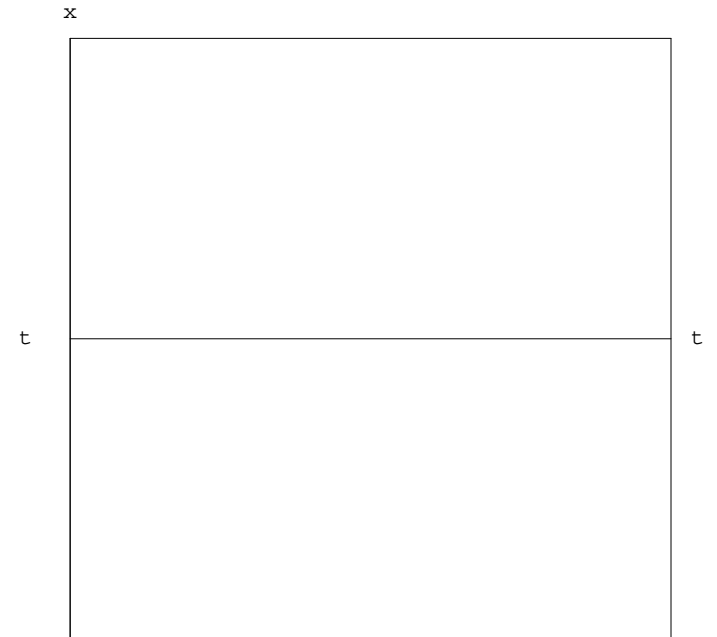
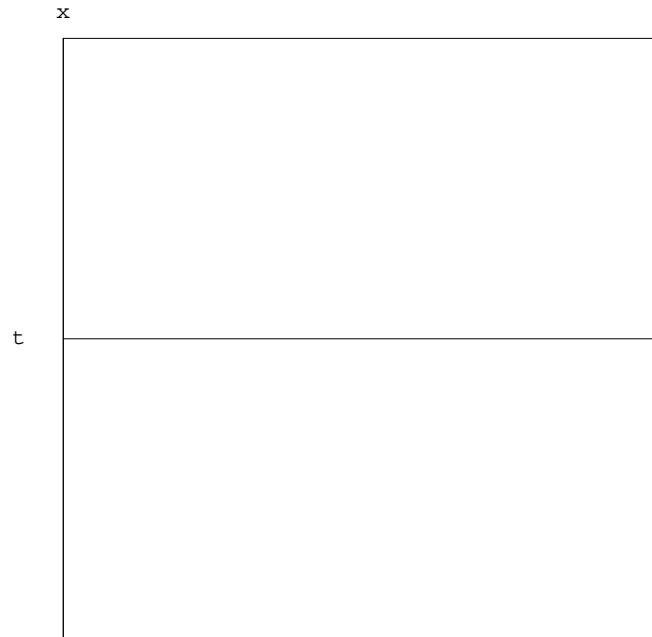
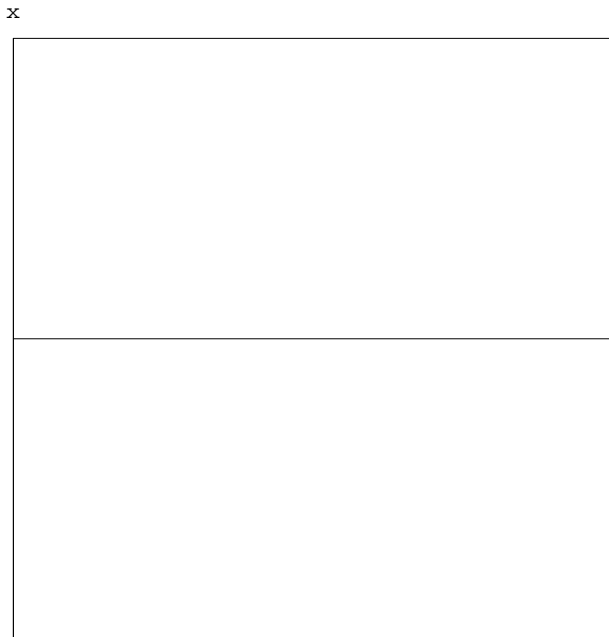
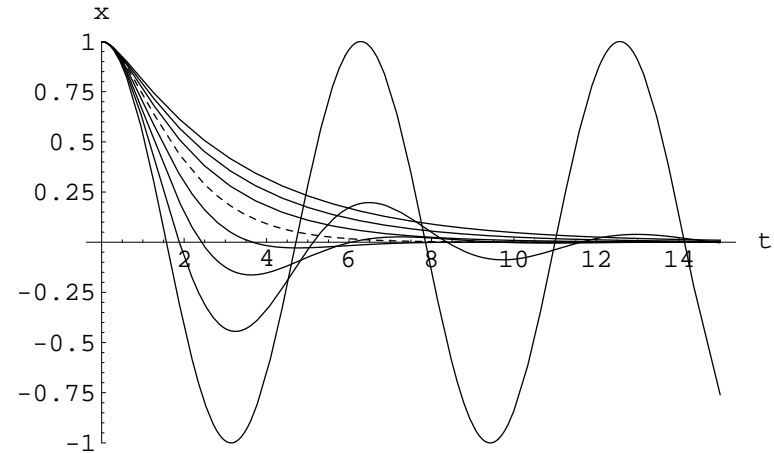
$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -kx(t) - \gamma \frac{dx}{dt}(t). \quad (67)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2}(t) + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0. \quad (68)$$

の場合には,  $k > 0, \gamma > 0$ . 特性方程式の判別式  $D = \frac{1}{m^2}(\gamma^2 - 4mk)$ .

訂正. p.105(2002/01/07) すみません. ページごと以下と入れ替えてください.

- 過減衰  $D > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{mk} < \gamma$
- 臨界制動  $D = 0 \Leftrightarrow \gamma = 2\sqrt{mk}$
- 減衰振動  $D < 0 \Leftrightarrow 0 < \gamma < 2\sqrt{mk}$



## 10 エネルギー保存則と位置エネルギー

### 10.1 力学的エネルギーの保存 (1次元)

位置  $x$  だけで決まる力  $F(x)$  を受けて 1 次元の運動をする, 質量  $m$  の質点を考えよう.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = F(x(t)). \quad (84)$$

あてはまる例 バネの力.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -k \times x(t). \quad \text{すなわち} \quad F(x) = -k \cdot x. \quad (85)$$

そうでない例 空気抵抗を受けるバネ. 力  $F$  は,  $x$  と  $v$  の関数.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -k \times x(t) - \gamma \times \frac{dx}{dt}(t). \quad (86)$$

(84) で  $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$  とおくと,

$$m \frac{dv}{dt}(t) = F(x(t)). \quad (87)$$

誰かが思いついたトリック. 両辺に  $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$  をかける.

$$mv(t) \frac{dv}{dt}(t) = F(x(t)) \frac{dx}{dt}(t). \quad (88)$$

$$\int mv(t) \frac{dv}{dt}(t) dt = \int F(x(t)) \frac{dx}{dt}(t) dt \quad (89)$$

$$dv = \frac{dv}{dt}(t) dt \text{ より, 左辺} = \int mv dv = \frac{1}{2} mv^2 + C_1. \quad (90)$$

$$dx = \frac{dx}{dt}(t) dt \text{ より, 右辺} = \int F(x) dx. \quad (91)$$

関数  $U(x)$  を, 力  $F(x)$  から

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(x') dx' \quad (92)$$

で定義する (高校で物理を勉強した人へのコメント: これは, 質点のされる **仕事** ) .

$$\frac{1}{2}mv^2 + C_1 = -U(x) + C_2. \quad (93)$$

すなわち 
$$\frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt}(t) \right)^2 + U(x) = E. (\text{一定}) \quad (94)$$

第 1 項  $\frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt}(t) \right)^2$  を質点の  という.

(92) で定義される第 2 項  $U(x)$  を質点の , または  という.

両者の和  $E$  を,  という.

式 (94) は, 力  $F(x)$  のもとで 1 次元を運動する質点の力学的エネルギー  $E$  は一定で変化しないことをいっている. これを,

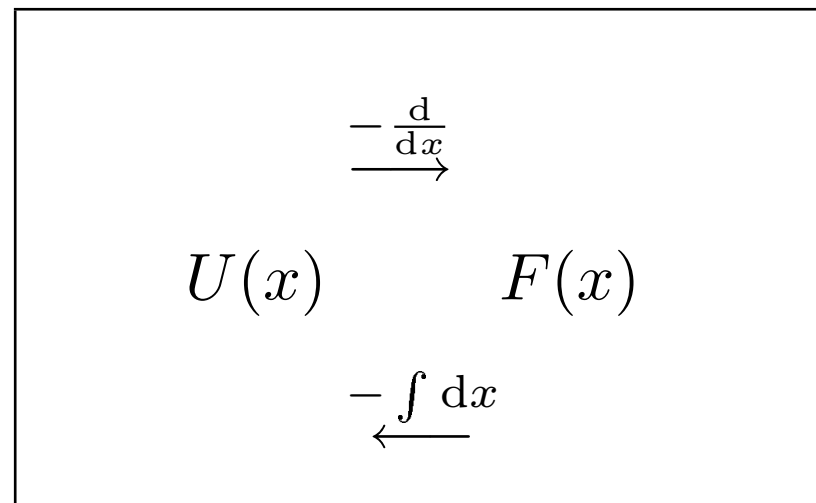
力学的エネルギーは ,  である, 不変である

などという.

一般に, 力  $F$  が, ある関数  $U$  を用いて,

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}(x) \quad (95)$$

と書けるとき, 関数  $U(x)$  をポテンシャルまたは位置エネルギーという.



$U(x)$  には, 定数の不定性がある. つまり  $U(x) + C$  が位置エネルギーと思ってもよい.

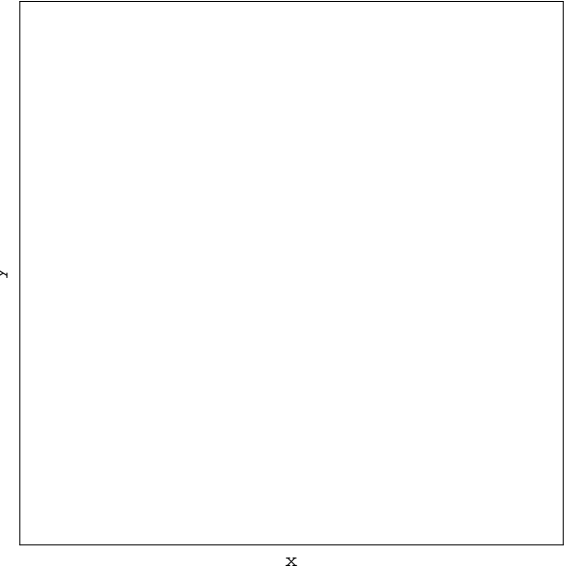
力  $F$  がポテンシャルを用いて書けるとき,  $F$  は  であるという.



**例** 重力のもとでの鉛直方向の運動. 高さを  $z$  とかく.  $F(z) = -mg$ .

$$U(z) = - \int_0^z F(z') dz' = - \int_0^z mg dz' = mgz.$$

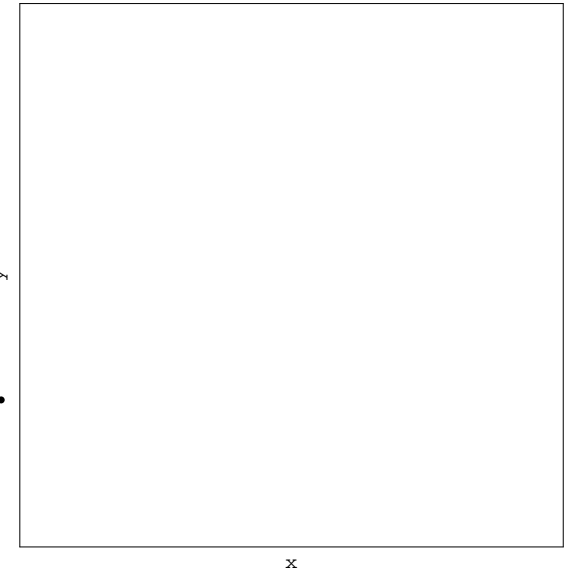
保存則  $\frac{1}{2}m \left( \frac{dz}{dt}(t) \right)^2 + mgz(t) = E(\text{一定}).$



**例** バネの力のもとでの運動. 自然長からの変位を  $x$ .  $F(x) = -kx$ .

$$U(x) = - \int_0^x F(x') dx' = - \int_0^x (-kx') dx' = \frac{1}{2}kx^2.$$

保存則  $\frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt}(t) \right)^2 + \frac{1}{2}k(x(t))^2 = E(\text{一定}).$



**例題 5** 1. ポテンシャルが  $U(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$  であるとき, 質点  
が受ける力  $F(x)$  を求めよ.

2. 重力のもとで (重力加速度  $g$ ), 質量  $m$  の質点を, 地表から速度  $v_0$   
で鉛直上向きに打ち出した. 最高点の高さを, 力学的エネルギー保  
存則を用いて求めよ.

## quiz 1

1. 1次元を運動する質点にはたらく力が  $F(x) = -x - x^3$  であるとき、ポテンシャル  $U(x)$  を求めよ.
2. ばね定数  $k$  のばねに取りつけられた、質量  $m$  の質点を考える. 自然長から  $x_0$  だけ引きのばして、静かに手を放した. 自然長に戻ったときの速さを、力学的エネルギー保存則を用いて求めよ.

**10.2 位置エネルギーを用いた運動の解析**

力学的エネルギー  $E$  を持つ物体の運動は,

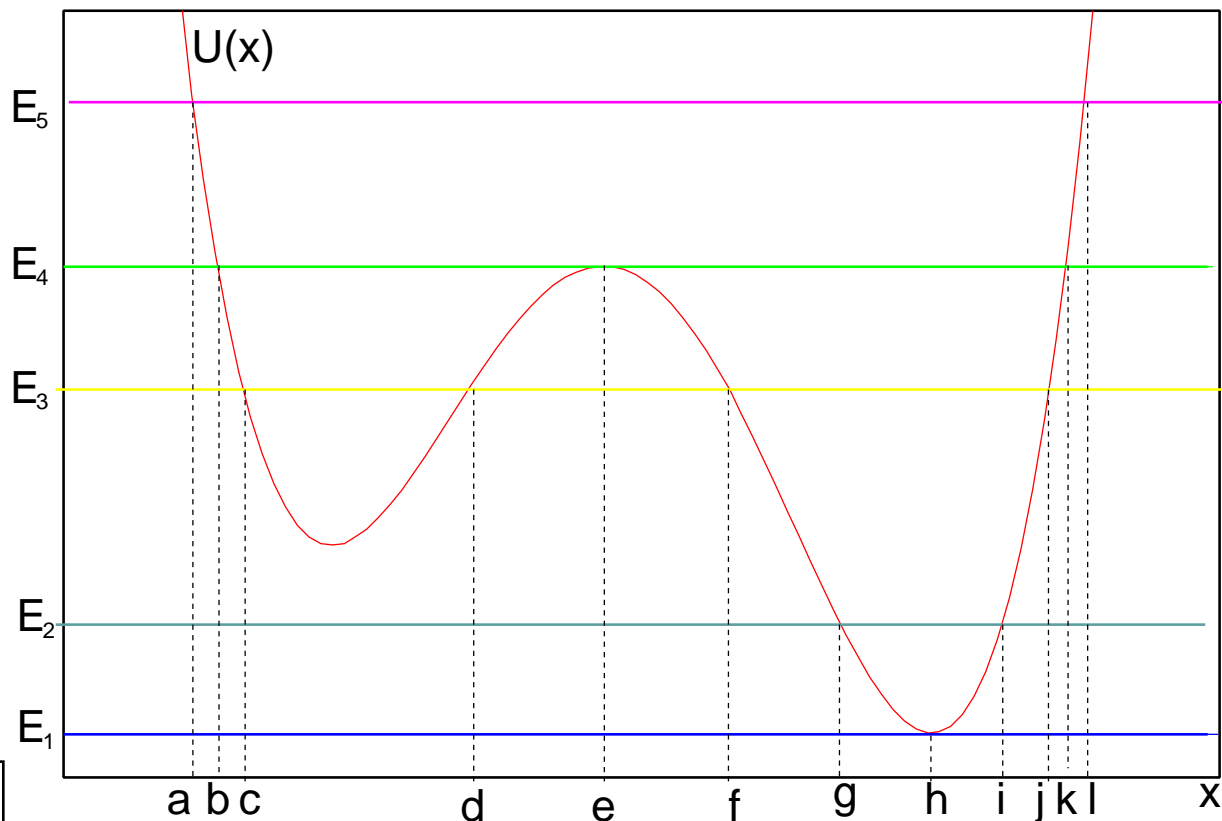
$$\frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt}(t) \right)^2 + U(x) = E. \quad (96)$$

を満たす (力学的エネルギー保存則). 変形して,

$$E - U(x) = \frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt}(t) \right)^2 \geq 0. \quad (97)$$

- 質点は,  $E - U(x) \geq 0$  であるような  $x$  にしか移動できない.
- $E - U(x) = 0$  であるような  $x$  では, 速度が 0 になる.

この性質を用いて, 質点の運動の様子を理解できる.



例

$E = E_1$  のとき,  $x = h$  で静止.

$E = E_3$  のとき,  $c \leq x \leq d$  を往復. または,  $f \leq x \leq j$  を往復

$E = E_4$  のとき,  $x = e$  で静止. または,  $b \leq x < e$  から  $x = e$  に限りなく近づく. または,  $e < x \leq j$  から  $x = e$  に限りなく近づく. ( $t \rightarrow \infty$ )

quiz 2  $E = E_2, E_5$  のときの運動を説明せよ.

きょうの quiz の略解は, 1/22 以降に 1-508 前トレイで配布します.

### 期末試験範囲

基本的には, 後期の講義で扱った部分すべてです. 講義ノートに載っていても, 説明しなかった事項は試験範囲ではありません. (とばした部分を取り除いた講義ノートを

<http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/> に置いていきます)

次の問題は出します.

- 変数分離型微分方程式  $(\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t))g(t))$ .
- 複素数. オイラーの公式. 極表示.
- 空気抵抗を受ける / 受けないばねの運動と  
 $\frac{d^2x}{dt^2}(t) + b\frac{dx}{dt}(t) + cx(t) = 0$  タイプの微分方程式.

## 先週の quiz 1

1. ポテンシャル  $U(x)$  は,

$$U(x) = - \int^x F(x') dx' = - \int^x (-x' - x'^3) dx' = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C \quad (98)$$

$C$  は積分定数で, 不定.

2. 変位を  $x$ ,  $v = \frac{dx}{dt}$  とすると位置エネルギーは  $\frac{1}{2}kx^2$  なので, 力学的エネルギー保存則は,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad (\text{一定}) \quad (99)$$

静かに ( $v = 0$ ) 手を離れた瞬間の左辺は

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2. \quad (100)$$

自然長に戻った ( $x = 0$ ) 瞬間の速度を  $v_0$  とすると, 左辺は

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k \cdot 0^2. \quad (101)$$

これらが等しいことと, 速度の向きを考えて,

$$v_0 = -x_0 \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad \text{速さは} \quad |v_0| = x_0 \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (102)$$

### 先週の quiz 2

$E = E_2$   $x = g$  と  $x = i$  の間の往復を繰り返す.  $x = h$  でもっとも速い.

$E = E_5$   $x = a$  と  $x = \ell$  の間の往復を繰り返す. どちら向きのときも,  $x = e$  付近でいったん減速する.  $x = h$  でもっとも速い.