物理数学II[1]小テスト2

龍谷大学理工学部数理情報学科 2001年12月10日 樋口さぶろお[2]

問 2,3,4 は, 結果だけでなく, 導出の過程を記すこと.

問1

解答用紙に印刷された問いに答えてください. 正しくお答えいただいた場合, 小テスト2の点数に5点を加算します.

お答えいただいたデータは, 成績との間の相関などを統計的に分析して, 学科の講義を改善するために使用します. それ以外の目的には使用しません. 統計的分析の結果は公表しますが, 個人別の回答は公表はしません. (上の 5 点以外は) 成績に関係しません.

問2

未知関数 $x(t)$ について, 次の微分方程式を, それぞれ与えられた初期条件のもとで解け.

なお, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 \rightsquigarrow 1\cdot\mathrm{d}x = 1\cdot\mathrm{d}t \rightsquigarrow \int 1\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}t + C$ のような解き方をしてもよい.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -3\cdot x(t), \quad x(0) = -2. \tag{1}$$

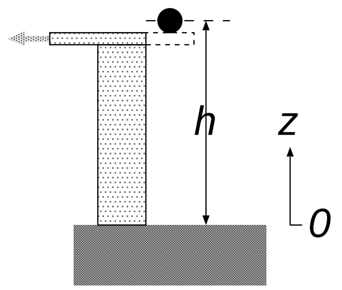
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = x(t)^5, \quad x(0) = 2. \tag{2}$$

問3

高さ h の塔のうえに, ボール (質量 m) が支えられていた. 時刻 $t=0$ に, 支えを静かにはずしたところ, ボールは, 重力 (重力加速度の大きさ g) と, 速度に比例する空気抵抗の力 (比例定数 $k>0$) を受けて落下した.

鉛直方向に z 軸を取る. 原点を地表とし, 上方向を正とする. 時刻 t でのボールの位置を $z(t)$ とし, $v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ とする.

1. $z(t)$ の満たす運動方程式を書け.
2. $z(t)$ の満たす初期条件を書け.
3. 運動方程式を初期条件のもとで解いて, $z(t)$ を求めよ. まず $v(t)$ について解くとよい.
4. $v(t)$ のグラフを描け. 塔は十分高いとして, $t\to\infty$ で $v(t)$ の近づく値を明記せよ.

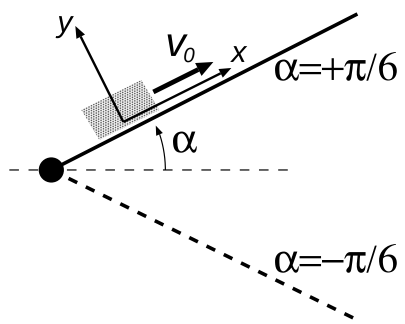


問4

傾きの角度 α (右上がりのとき $\alpha>0$) を自由に変えられる斜面がある. 斜面にそって右方向に, 速度 v_0 で質量 m の物体を打ち出す. 物体は, 重力 (重力加速度 g) と, 斜面との間の動摩擦力 (動摩擦係数 $\mu' = 2/3$), 面からの垂直抗力 N を受けて運動する.

図のように, 斜面に平行に x-軸, 垂直に y-軸をとる. x, y 方向の運動方程式をたて, 解いて, 次の量を求めよ.

1. $\alpha = +\pi/6$ のとき, いったん静止するまでに物体が上る, 斜面に沿った道のり.
2. $\alpha = -\pi/6$ のとき, 静止するまでに物体が下る, 斜面に沿った道のり.



[1] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/

[2] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, へや 1-508, でんわ 077-543-7501

略解

問 2

(1)　積分定数を C として,

$$\int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = -3 \int 1 \cdot \mathrm{d}t + C, \qquad (1)$$

$$\log|x| = -3t + C$$

$$x = \pm\,\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{-3t} = C'\mathrm{e}^{-3t}.$$

初期条件より

$$x(t) = -2\mathrm{e}^{-3t}.$$

(2)　積分定数を C として,

$$\int \frac{1}{x^5} \cdot \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \mathrm{d}t + C, \qquad (2)$$

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{x^4} = t + C$$

$$x = \pm\,(-4C - 4t)^{-1/4}.$$

初期条件より

$$x(t) = m(\tfrac{1}{16} - 4t)^{-1/4}$$

$$= 2(1 - 64t)^{-1/4}$$

問 3

1. 重力は $-mg$, 空気抵抗の力は $-k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ なので, 運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg - k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \qquad (3)$$

2. $z = h$ から, 静かに (初速 0 で) 落したので,

$$z(0) = h, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \qquad (4)$$

3. (3) を $v(t) = -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ についての微分方程式に書き直すと,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -g - \frac{k}{m}v(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{k}{m}(v(t) + \tfrac{mg}{k})$$

$$\int \frac{1}{v + \frac{mg}{k}}\mathrm{d}v = -\int \frac{k}{m}\mathrm{d}t + C,$$

(C は積分定数)

$$\log\left|v + \frac{mg}{k}\right| = -\frac{k}{m}t + C$$

$$v + \frac{mg}{k} = \pm\,\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v(t) = -\frac{mg}{k} + C_1\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

$$(C_1 = \pm\mathrm{e}^{C}).$$

初期条件 $v(0)(= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0)) = 0$ より

$$v(t) = -\frac{mg}{k}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})$$

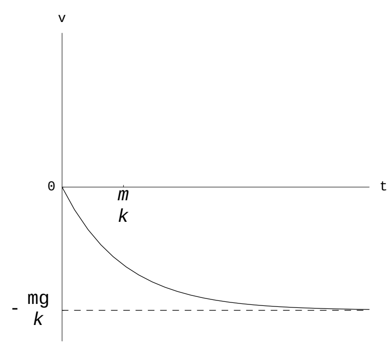
積分して

$$z(t) = -\frac{mg}{k}t + \frac{mg}{k}\frac{1}{-\frac{k}{m}}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + C_2.$$

初期条件 $z(0) = h$ より

$$z(t) = -\frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}) + h$$

4. $t = 0$ では, 傾き $-g$ で $v = 0$ を通り, $t \to \infty$ で $-mg/k$ に近づくので, 下のようになる.



問 4

1. x 方向には重力の x 成分と摩擦力が, y 方向には重力の y 成分と垂直抗力がはたらく. いったん止まるまでは, 摩擦力は x 軸の負の方向にはたらくので, 運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg\sin\alpha - \mu' N, \tag{5}$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg\cos\alpha + N \tag{6}$$

$y(t) \equiv 0$ なので, (6) より $N = mg\cos\alpha$. (5) に代入して

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg(\sin\alpha + \mu'\cos\alpha). \tag{7}$$

これを解いて, 初期条件 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$ を用いると, x_0 を積分定数として,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\,g(\sin\alpha + \mu'\cos\alpha)t + v_0.$$
$$x(t) = -\,\frac{1}{2}g(\sin\alpha + \mu'\cos\alpha)t^2 + v_0 t + x_0. \tag{8}$$

いったん止まる時刻 T は, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) = 0$ を解いて,

$$T = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu'\cos\alpha)}. \tag{9}$$

上った道のりは,

$$x(T) - x(0) = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu'\cos\alpha)}.$$

ここで, $\mu' = 2/3$, $\alpha = \pi/6$ を用いると,

$$x(T) - x(0) = \frac{v_0^2}{g(1 + 2/\sqrt{3})}$$

2. 上の計算で, (8) を求めるまでは $\alpha = -\pi/6$ とすれば同じ. 止まる時刻 T を考えると,

$$T = \frac{v_0}{g(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2})} > 0 \tag{10}$$

となり, 確かに止まることがわかる. 下る道のりは,

$$x(T) - x(0) = \frac{v_0^2}{g(-1 + 2/\sqrt{3})}$$

得点通知のお知らせ

小テスト 1 と同様, 点数を個別に e-mail でお知らせします.