1.6 前回の quiz の解答例

答案は 1-508 **前の引き出しで返却中** (**添削はできません**).

1. **略**. **青いチョークは使うのやめます**.
2. **力は一定なので**, $m\vec{a} = \vec{F}$ **より**, $\vec{a} =$ **一定 の定加速度運動**. **加速度** $\vec{a}$ **と力** $\vec{F}$ **の大きさは**,
$$|\vec{a}| = (0.6 - 0)\mathrm{m/s/60s} = 0.01\mathrm{m/s}^2, \tag{15}$$
$$|\vec{F}| = 0.01\mathrm{m/s}^2 \times 10\mathrm{kg} = 0.1\mathrm{kg\ m/s}^2 = 0.1\mathrm{N} \tag{16}$$
3. **運動方程式** $m\vec{a} = \vec{F}$ **より**, **加速度は**,
$$2\mathrm{N}/2\mathrm{kg} = 2\mathrm{kg\ m/s}^2/2\mathrm{kg} = 1\mathrm{m/s}^2. \tag{17}$$
定加速度運動なので, $t = 10\mathrm{s}$ **での速さ** $v(t)$ **と位置** $r(t)$ **は**,
$$v(t) = \int_0^t a\ \mathrm{d}t' + v(0) = at = 1\mathrm{m/s}^2 \times 10\mathrm{s} = 10\mathrm{m/s}, \tag{18}$$
$$r(t) = \int_0^t at'\ \mathrm{d}t' + r(0) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\mathrm{m/s}^2 \times (10\mathrm{s})^2 = 50\mathrm{m}. \tag{19}$$
4. **加速度ベクトルを求めると**, $\vec{a} = (x''(t), y''(t), z''(t)) = \left((1 - \cos t - \sin t - \sin 2t)\mathrm{e}^{\cos t + \sin t}, 0, 0\right)$.
運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$ **より**, **力** $\vec{F}$ **は**,
$$\vec{F} = \left(m(1 - \cos t - \sin t - \sin 2t)\mathrm{e}^{\cos t + \sin t}, 0, 0\right). \tag{20}$$

2 運動方程式

2.1 運動の第二法則

佐本 3.4

時刻 t **での位置** $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. **力** $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, **質量** m.

ニュートンの運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \vec{F}, \tag{21}$$

成分で書くと

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_x, \\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_y, \\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_z. \end{cases} \tag{22}$$

注: $\vec{F}$ **は時間** t **や位置** $x(t)$ **の関数かも**.

しばらく, 運動が x 方向に限られた場合を考えよう. $x(t)$ だけを考えよう.

2.2 力を受けない場合 (≈ 第一法則)

$$F_x = 0 \rightsquigarrow m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0. \tag{23}$$

このような方程式 (未知関数 $x(t)$ に関する方程式で, 微分を含んでいるもの) を 微分方程式 という.

$x(t)$ を求める (微分を含まない式にする) ことを, 微分方程式を解く (微分方程式を積分する) という.

解き方の例

(23) の両辺を t で (不定) 積分.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C_1 \qquad (C_1 = C' - C : \text{積分定数}) \tag{25}$$

もういちど両辺を t で積分.

$$x(t) = C_1 t + C_2 \qquad (C_2 =: \text{積分定数}) \tag{27}$$

$\boxed{\text{等速 (直線) 運動}}$!

3 次元の場合

$F_x = F_y = F_z = 0 \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}rt^2}(t) = 0. \end{cases} \tag{28}$$

同様に,

$$\begin{cases} x(t) = C_1 t + C_2, \\ y(t) = C_3 t + C_4, \\ z(t) = C_5 t + C_6 \end{cases} \quad \text{別の書き方} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \\ C_6 \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \vec{r}(t) = \vec{v}t + \vec{r}_0 \tag{29}$$

C_i は積分定数.

$\boxed{\text{等速直線運動}}$!

引き続き, **運動が** x **方向に限られた場合を考えよう**. $x(t)$ **だけを考えよう**.

2.3 一定の力を受ける場合

佐本 2.2

$F_x = f$(**定数**). **時間によらない**.

運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = f(\textbf{定数}). \tag{30}$$

解き方の例

(23) **の両辺を** t **で積分**.

両辺をもういちど t **で積分**

等加速度運動!

t **で微分して**, **もとに戻るか** check **しよう**!

例題 4 (落体の運動) 質量 m の物体が鉛直方向にのみ運動している．鉛直上向きに x 軸をとる．重力 mg が下向きに働いている．

時刻 $t = 0$ で，$x = 0$ の位置から，鉛直上向きに速さ v_0 で物体を打ち出したときの運動を求めよ．

解答例

答えは $x(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t.$ (35)

積分定数と初期条件

ニュートンの微分方程式を積分すると，2 個の 積分定数 が現れる．これは，微分方程式が 2 階であるためである．これら 2 個の積分定数は，

$$x(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 \tag{36}$$

のような，2 個の 初期条件 から決定される (例えば，).

初期条件が与えられていないと，運動はひとつには定まらない (積分定数が残る)．

2.4 時間的に変化する力

例題 5 質量 m の物体が, 力 $F_x(t) = f\mathrm{e}^{-t/\tau}$ を受けて運動している $(f, \tau > 0$, 定数$)$. 時刻 $t = 0$ で $x = 0$ に静止していた物体の運動を求めよ. とくに時刻 $t \to \infty$ での速度を求めよ.

$$x(t) = \boxed{} \tag{40}$$

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \boxed{} \tag{41}$$

次元解析

この答えは, 次元解析から予測可能 佐本 4.5

答えは次のもので書けるはず.

		単位	次元
力	f	kg m/s^2	$\mathrm{M^1L^1T^{-2}}$
質量	m	kg	$\mathrm{M^1L^0T^0}$
定数	τ	s	$\mathrm{M^0L^0T^1}$

τ **は時間の次元を持つ. なぜなら,** $\boxed{}$.

$\mathrm{e}^{-t/\tau}$ **は** $\boxed{}$

答えを $v(+\infty)$ [m/s] **とすると, 次元は** $\mathrm{M^0L^1T^{-1}}$

$$v(+\infty) = f^a m^b \tau^c \times \textbf{無次元の数} \tag{42}$$

とすると,

$$(\mathrm{M^0L^1T^{-1}}) = (\mathrm{M^1L^1T^{-2}})^a (\mathrm{M^1L^0T^0})^b (\mathrm{M^0L^0T^1})^c \tag{43}$$

すると,

$$0 = a + b, \quad 1 = a, \quad -1 = -2a + c. \tag{44}$$

よって, $a = 1, b = -1, c = 1.$

$$v(+\infty) = f^1 m^{-1} \tau^1 \times \textbf{無次元の数} \tag{45}$$

例題 6 質量 $1\ [kg]$ の物体が, 時刻 $t=0\ [s]$ で $x=0$ に静止していた.

時刻 $t=0[s]$ から $t=10\ [s]$ まで, x 軸の正の方向に $2\ [N]$ の力を受け, $t=10\ [s]$ から $t=20[s]$ まで x 軸の負の方向に $2\ [N]$ の力を受けた. $0<t<20$ での物体の位置 $x(t)\ [m]$ を求めよ.

2.5 微分方程式

今日出てきた微分方程式はいちばん簡単なタイプ. (2 階常微分方程式の中の特別に簡単なもの)

数理情報学科の数学の先生たちの多くは微分方程式の専門家.

他の科目との関係

- 数値計算法 (2), 計算科学 (3): 微分方程式を計算機で数値的に解く.
- 数理モデル基礎 (2), 現象の数学 (3), 非線形数理 (3): より進んだ微分方程式の扱い.
- 偏微分方程式 (3), 応用力学系 (4): より進んだ微分方程式の数学的に厳密な取り扱い.
- 力学 (2), 電磁気学 (3): 微分方程式が使われる物理.

2.6 きょうの quiz

1. 質量 m の物体が鉛直方向にのみ運動している．鉛直上向きに x 軸をとる．重力 mg が下向きに働いている．

   時刻 $t=0$ で, $x=0$ の位置から (適当な速度で) 打ち出された物体が, 時刻 $t=\tau$ に, $x=g\tau^2$ に到達したという．

   任意の時刻 t での物体の位置 $x(t)$ を, g, τ を使って表せ．

2. 質量 m の, 時刻 $t=0$ で $x=0$ に静止していた物体が, $t>0$ で, 力 $F_x(t)=\frac{f\tau^2}{(t+\tau)^2}$ を受けて運動する $(f, \tau>0$, 定数$)$．

   $t>0$ での物体の運動を求めよ．

   [暇と興味のあるひとは: 時刻 $t\to\infty$ で, $x(t)$, $\frac{dx}{dt}(t)$ はどうなるか．]