2.7 前回の quiz の解答例

1. **運動方程式は**

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg. \tag{51}$$

2 回積分すると,

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2. \quad (C_1, C_2\text{は積分定数}) \tag{52}$$

初期条件より

$$0 = x(0) = -\frac{1}{2}g\cdot 0^2 + C_1\cdot 0 + C_2, \tag{53}$$

$$g\tau^2 = x(\tau) = -\frac{1}{2}g\cdot\tau^2 + C_1\cdot\tau + C_2 \tag{54}$$

より, $C_1 = \frac{3}{2}g\tau, C_2 = 0$. **よって**,

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{3}{2}g\tau t. \tag{55}$$

(**運動方程式と初期条件をみたすことを** check **しよう**).

2. **運動方程式は**

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{f\tau^2}{(t+\tau)^2}. \tag{56}$$

$(-\frac{1}{t+1})' = \frac{1}{(t+1)^2}$ に注意して,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{f\tau^2}{m}\frac{1}{(t+\tau)} + C_1. \tag{57}$$

$(\log(t+1))' = \frac{1}{t+1}$ に注意して,

$$x(t) = -\frac{f\tau^2}{m}\log(t+\tau) + C_1 t + C_2. \tag{58}$$

初期条件より,

$$0 = x(0) = -\frac{f\tau^2}{m}\log(0+\tau) + C_1\cdot 0 + C_2. \tag{59}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -\frac{f\tau^2}{m}\frac{1}{(0+\tau)} + C_1. \tag{60}$$

よって, $C_2 = \frac{f\tau^2}{m}\log\tau, C_1 = \frac{f\tau}{m}$. けっきょく

$$x(t) = -\frac{f\tau^2}{m}\log\frac{t+\tau}{\tau} + \frac{f\tau}{m}t. \tag{61}$$

[いまは分からないかもしれない注: 途中で出てくる $\log$ (時間) のような形は本当はおかしい. だって, $\log(24$ 分$)$ っていくつ?]

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{f\tau}{m}. \tag{62}$$

2.8 微分方程式を解く練習

与えられた初期条件のもとで, **微分方程式を解いて**, $x(t)$ **を求めよ**.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 1 - 2t, \quad x(0) = 0, \tag{63}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \omega\cos(\omega t), \quad x(0) = 1, \quad (\omega(\text{オメガ}) > 0 \text{ は定数. よく角振動数を表すのに使われる.}) \tag{64}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 2 - \mathrm{e}^{-3t}, \quad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{65}$$

3 放物運動

佐本 2.4

3.1 力の働かないときの 3 次元の運動

時刻 t での位置 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. 力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, 質量 m. ニュートンの運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \vec{F}, \quad \text{成分で書くと} \begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_x, \\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_y, \\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_z. \end{cases} \tag{66}$$

$$\text{力が働かない} \iff \vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0,0,0) \rightsquigarrow \begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0. \end{cases} \tag{67}$$

成分ごとに 2 回積分して,

$$\begin{cases} x(t) = v_{x0}t + x_0, \\ y(t) = v_{y0}t + y_0, \\ z(t) = v_{z0}t + z_0, \end{cases} \quad \text{別の書き方} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \boxed{} \tag{68}$$

等速直線運動 $v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0, z_0$ は積分定数.

$\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ は $\boxed{}$ $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ は $\boxed{}$

3.2 重力のもとでの 3 次元の運動

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -mg) \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = v_{x0}t + x_0, \\ y(t) = v_{y0}t + y_0, \\ z(t) = \boxed{}. \end{cases} \tag{69}$$

積分定数 $v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0, z_0$. 2 **階** $\times$ 3 **次元** $=$ 6 **個**.

座標系の原点を変え, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ **としても一般性を失わない**. ($x(t) - x_0$ **を** $x_{\mathrm{new}}(t)$ **と思い直した**).

座標系を回して, $v_{y0} = 0$ **としても一般性を失わない**.

$$y(t) = 0, \tag{70}$$

$$x(t) = v_{x0}t, \tag{71}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t. \tag{72}$$

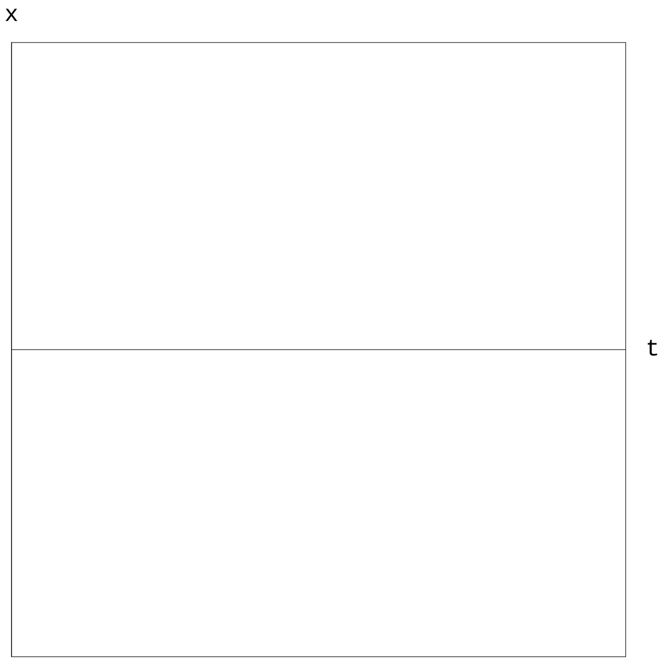
最高点 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ **となる時刻** $t = T_1$ **は**, $-gT_1 + v_{z0} = 0 \rightsquigarrow T_1 = v_{z0}/g$.

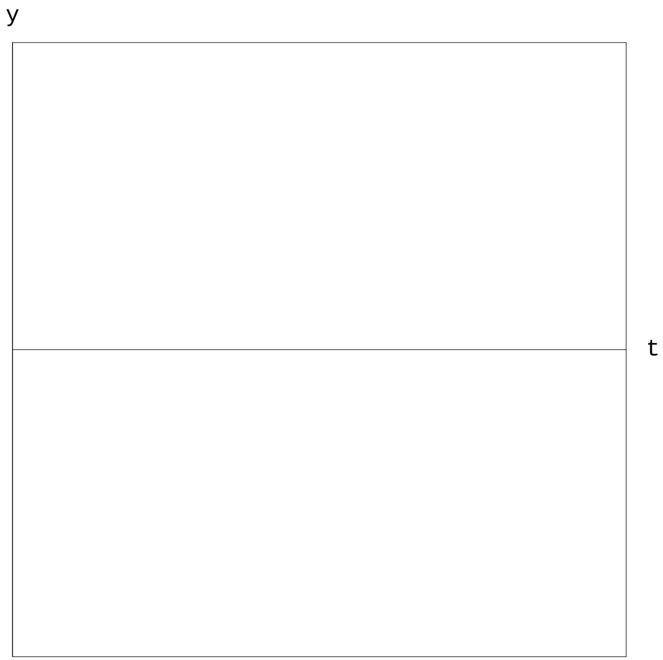
最高点の位置は, $\boxed{}$.

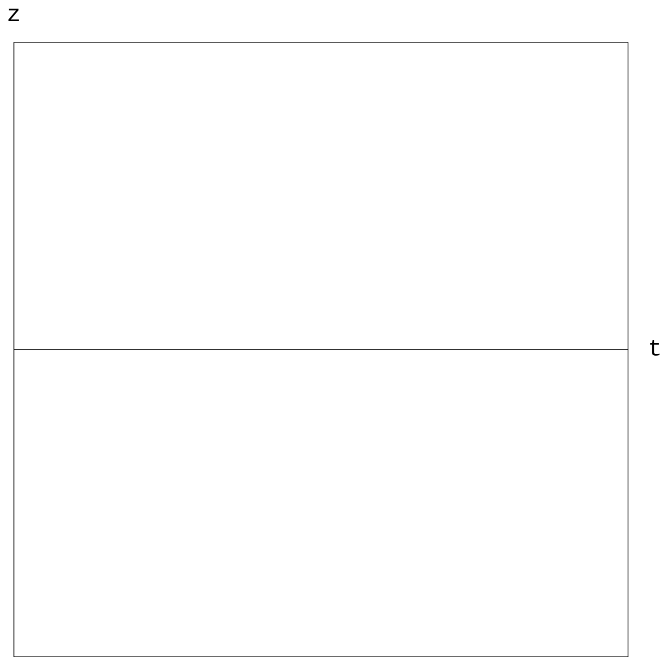
到達距離 **ふたたび** $z(t) = 0$ **となる時刻** $t = T_2$ **は**, $-\frac{1}{2}gT_2^2 + v_{z0}T_2 = 0 \rightsquigarrow T_2 = 2v_{z0}/g$.

到達距離は $\boxed{}$.

運動の様子







例題 7 **地上から, 角度 θ の方向に初速の大きさ v_0 でボールを投げたとき, その最高点の高さと落下点までの距離を求めよ. ただし, 重力加速度を g とする.**

初速の大きさ v_0 が一定のとき, もっとも遠くまでボールが届くのは, θ がどのような値のときか.

例題 8 **地上から, 角度 $\pi/6$ の方向に初速の大きさ v_0 でボールを投げる. 水平に a だけはなれた位置にある, 高さ h の壁を越えるためには, 初速の大きさ v_0 はどれだけ以上である必要があるか. ただし, 重力加速度を g とする. 壁の高さは, $h < a/\sqrt{3}$ を満たす.**

(x, z) 空間での運動の軌跡を考えよう.

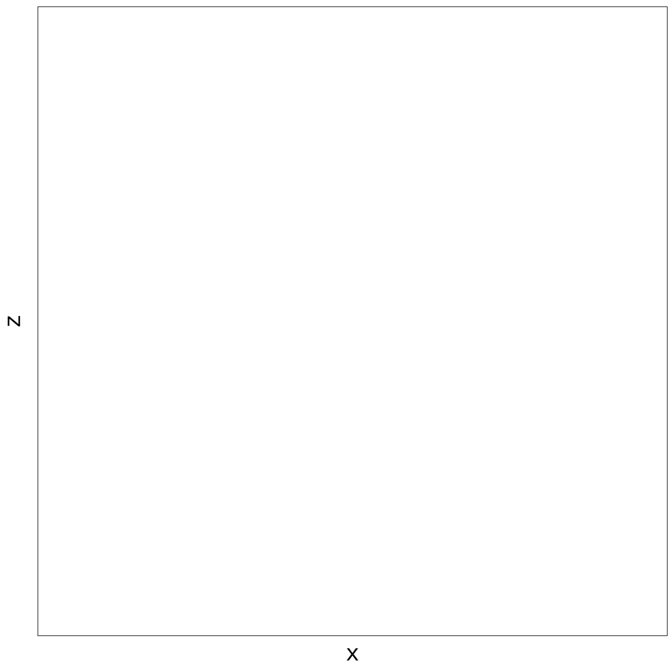
(71),(72) **から** t **を消去.**

$$z(t) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x(t)}{v_{x0}} \right)^2 + v_{z0} \left(\frac{x(t)}{v_{x0}} \right). \tag{73}$$

平方完成 $\rightsquigarrow$

$$z(t) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{74}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{x0}^2} (x(t) - x_{\mathrm{m}})^2 + z_{\mathrm{m}} \tag{75}$$



放物線!

最高点 $(x_{\mathrm{m}}, z_{\mathrm{m}}) = (\frac{v_{x0} v_{z0}}{g}, \frac{v_{z0}^2}{2g})$.

落下点 $(2x_{\mathrm{m}}, 0)$.