3.3 重力のもとでの 3 次元の運動

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -mg) \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = v_{x0}t + x_0, \\ y(t) = v_{y0}t + y_0, \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t + z_0. \end{cases} \tag{76}$$

積分定数 $v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0, z_0$. 2 **階** $\times$ 3 **次元** $=$ 6 **個**.

座標系の原点を変え, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ **としても一般性を失わない**. ($x(t) - x_0$ **を** $x_{\mathrm{new}}(t)$ **と思い直した**).

座標系を回して, $v_{y0} = 0$ **としても一般性を失わない**.

$$y(t) = 0, \tag{77}$$

$$x(t) = v_{x0}t, \tag{78}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t. \tag{79}$$

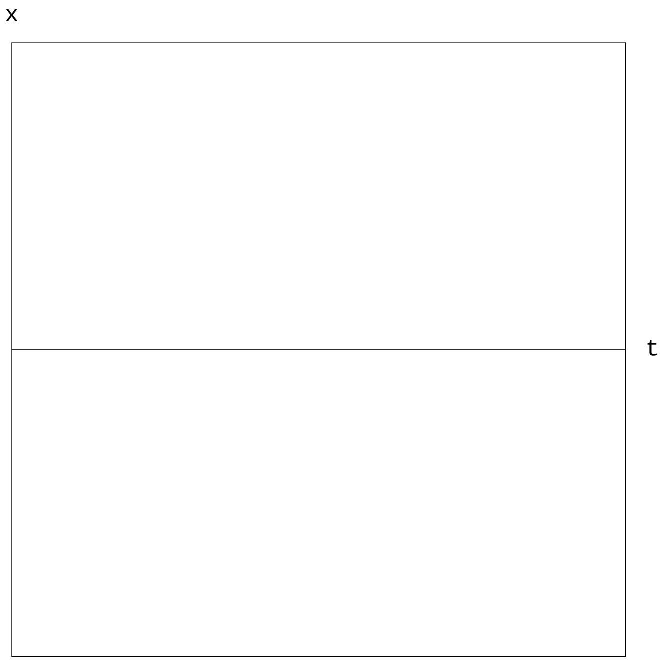
最高点 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ **となる時刻** $t = T_1$ **は**, $-gT_1 + v_{z0} = 0 \rightsquigarrow T_1 = v_{z0}/g$.

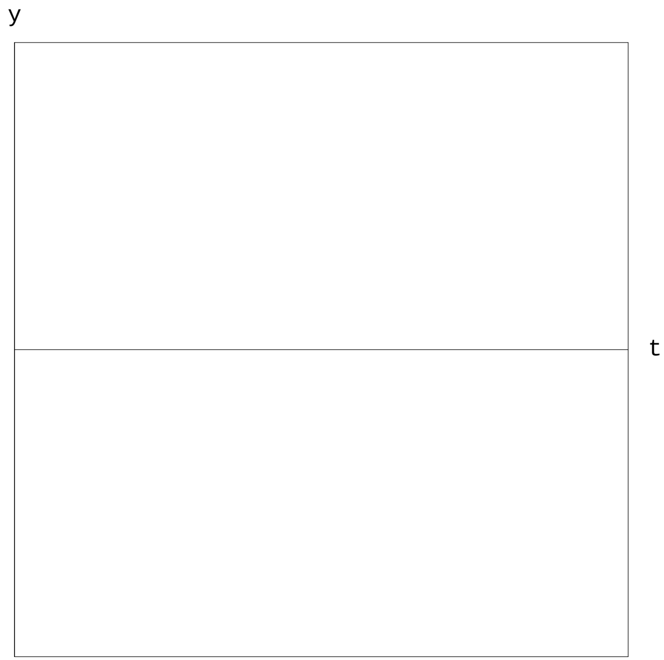
最高点の位置は, $x(T_1) = v_{x0}v_{z0}/g, z(T_1) = \frac{v_{z0}^2}{2g}$.

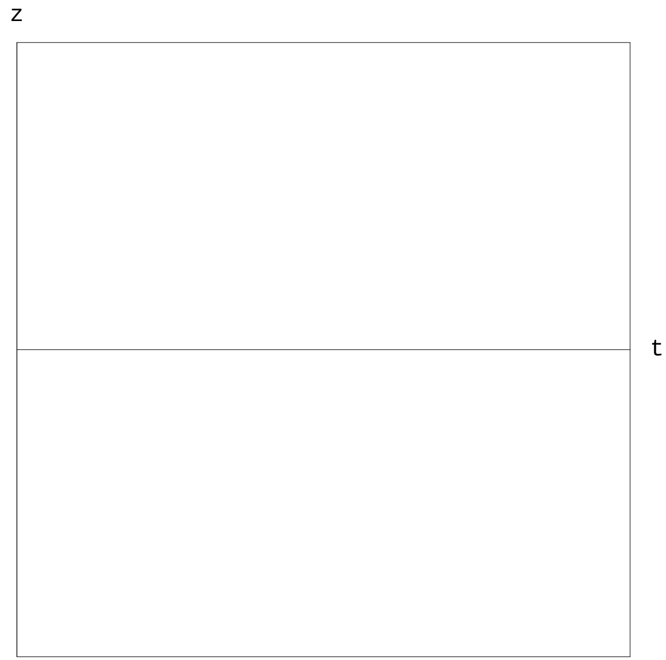
到達距離 **ふたたび** $z(t) = 0$ **となる時刻** $t = T_2$ **は**, $-\frac{1}{2}gT_2^2 + v_{z0}T_2 = 0 \rightsquigarrow T_2 = 2v_{z0}/g$.

到達距離は $\boxed{}$.

運動の様子







例題 9 地上から, 角度 θ の方向に初速の大きさ v_0 でボールを投げたとき, その最高点の高さと落下点までの距離を求めよ. ただし, 重力加速度を g とする.

初速の大きさ v_0 が一定のとき, もっとも遠くまでボールが届くのは, θ がどのような値のときか.

例題 10 地上から, a 離れた壁に向けて初速の大きさ v_0 でボールを投げる. 角度 θ の方向に投げたときに, ボールがあたる点の高さを求めよ. ただし, 重力加速度を g とする.

例題 11 地上から, 角度 $\pi/6$ の方向に初速の大きさ v_0 でボールを投げる. 水平に a だけはなれた位置にある, 高さ h の壁を越えるためには, 初速の大きさ v_0 はどれだけ以上である必要があるか. ただし, 重力加速度を g とする. 壁の高さは, $h < a/\sqrt{3}$ を満たす.

例題 12 (難) 地上のある点から初速の大きさ v_0 でボールを投げる. 距離 a だけ離れた, 高さ h の壁を越えさせるためには, v_0 は最小でもどれだけである必要があるか.

例題 13 (難) 高さ h の塔の上から, 初速の大きさ v_0 でボールを投げる. 地面のどの範囲に届くか.

(x, z) 空間での運動の軌跡を考えよう.

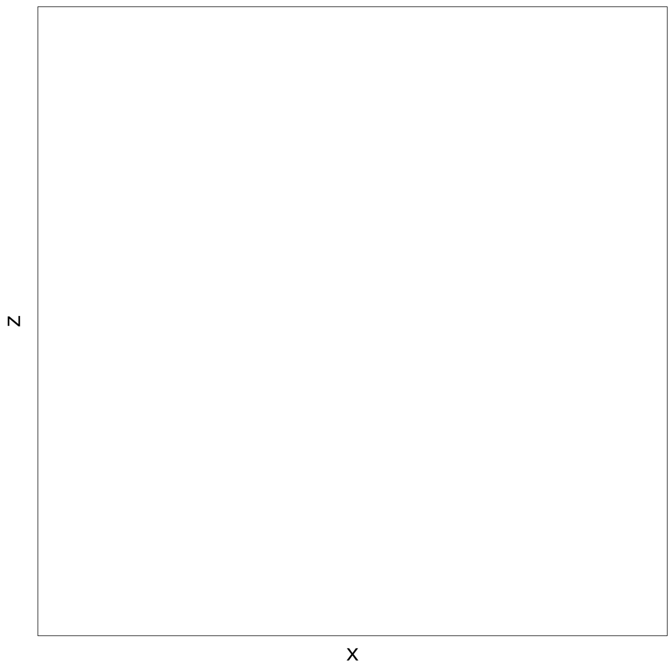
(78),(79) から t を消去.

$$z(t) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x(t)}{v_{x0}}\right)^2 + v_{z0}\left(\frac{x(t)}{v_{x0}}\right). \tag{80}$$

平方完成 $\rightsquigarrow$

$$z(t) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{81}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x0}^2}(x(t) - x_{\mathrm{m}})^2 + z_{\mathrm{m}} \tag{82}$$



放物線!

最高点 $(x_{\mathrm{m}}, z_{\mathrm{m}}) = (\frac{v_{x0}v_{z0}}{g}, \frac{v_{z0}^2}{2g})$.

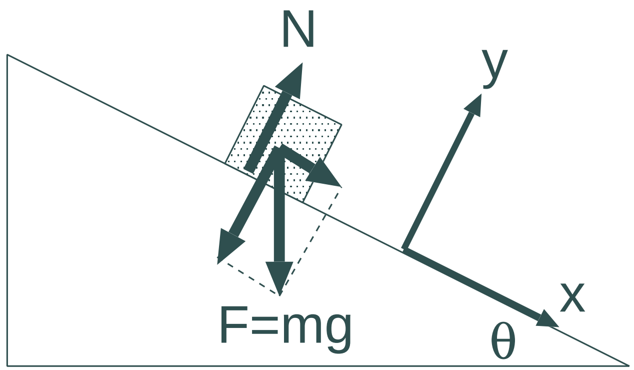
落下点 $(2x_{\mathrm{m}}, 0)$.

4 斜面に沿う運動

佐本 4.1

水平から θ だけ傾いたなめらかな斜面をすべる物体 (質量 m).

運動方程式 (はたらく力は, $\vec{F}$: 重力, $\vec{N}$: 垂直抗力.)



$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} + \vec{N}. \tag{83}$$

成分で書くと,

$$\boxed{} \tag{84}$$

$$\boxed{}. \tag{85}$$

$\rightsquigarrow$

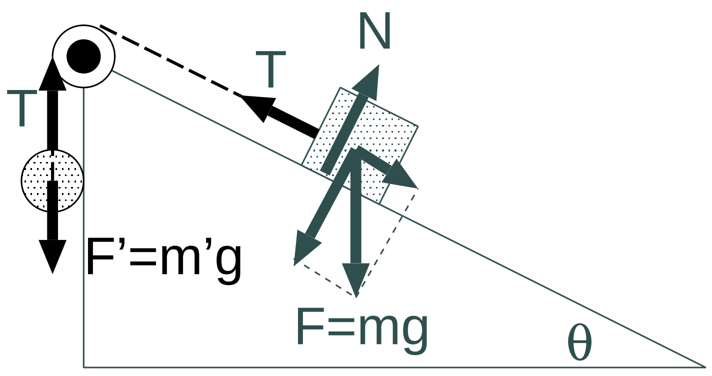
$$x(t) = \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2 + v_{x0}t + x_0, \tag{86}$$

$$y(t) = v_{y0} + y_0 = 0. \tag{87}$$

垂直抗力の大きさは,

$$N = mg\cos\theta \tag{88}$$

例題 14 図の状況で, 伸び縮みしないひもでつながれた 2 つの物体 (質量 m, m') の運動を求めよ. (*Hint.* ひもの張力を T とおけ). 佐本 4.2



小テストのお知らせ

物理数学 II の小テストを, 11 月 12 日, 12 月 3 日 の 2 回行ないます.

最終的な成績は,

$$(\text{出席}+\text{quiz}):\text{小テスト }1:\text{小テスト }2:\text{期末試験} = 10:20:20:50 \tag{89}$$

で決定します.

11 月 12 日の試験の範囲は, 運動方程式, 落体の運動, 放物運動 です.