3.4 例題の略解

例題 10

ボールを原点から $t=0$ **に投げるとする．壁の方向を** x **軸にとると，壁にボールが当たる時刻** $t=T_1$ **は，**

$$x(T_1)=v_{0x}\times T_1=(v_0\cos\theta)\times T_1=a \text{ すなわち } T_1=a/(v_0\cos\theta). \tag{90}$$

時刻 $t=T_1$ **でのボールの高さは，**

$$z(T_1)=-\frac{1}{2}gT_1^2+v_{0y}T_1=a\tan\theta-\frac{1}{2}g\left(\frac{a}{v_0\cos\theta}\right)^2. \tag{91}$$

例題 11

上の例題で， $\theta=\pi/6$ **としたときに，**

$$z(T_1)=a\tan\theta-\frac{1}{2}g\left(\frac{a}{v_0\cos\theta}\right)^2>h \tag{92}$$

であればよいから，不等式を v_0 **について解いて，**

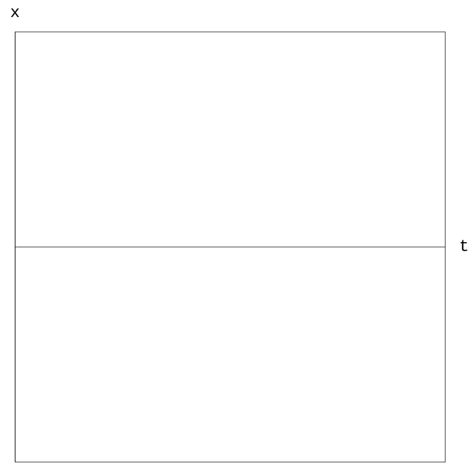
$$v_0>\sqrt{\frac{2ga}{\sqrt{3}-\frac{3h}{a}}} \tag{93}$$

5 空気抵抗のある場合の運動

5.1 空気抵抗のみがある場合

物体の 空気抵抗 は, 向きは速度 $\vec{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ と逆, 大きさは速度 $\vec{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ に比例.

$$\text{空気抵抗の力}\quad \vec{F}=-k\vec{v}(t).\quad k\ \text{は正の比例定数} \tag{94}$$



空気抵抗だけを受ける, 1 次元の運動を考えよう. (例えば, 宇宙船内で物を投げたときの 1 次元の運動). 質量を m とすると運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{95}$$

$v(t)=v_x(t)$ に対して,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)=-\frac{k}{m}v(t). \tag{96}$$

[注: 運動方程式に, $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ のみで $x(t)$ が入ってなければ, $v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおいて, まず $v(t)$ を求める.]

微分すると自分の $-k/m$ 倍になる関数って何?

(97)

積分して (98)

5.2 (変数分離型) 微分方程式

次の性質を満たす関数 $x(t)$ **を求めよ**.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t), \qquad \textbf{初期条件}\ x(0) = 4. \tag{99}$$

$x(t) = 4\mathrm{e}^{2t}$.

この解き方を $\boxed{\text{変数分離法}}$ **といい**,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)g(t) \tag{100}$$

のような形 ($\boxed{\text{変数分離形}}$) **のときに使える**.

例題 15　次の微分方程式を，それぞれ，初期条件のもとで解け．

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x, \quad x(0) = 2. \tag{101}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2x, \quad x(0) = 2. \tag{102}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x^2, \quad x(0) = 2. \tag{103}$$

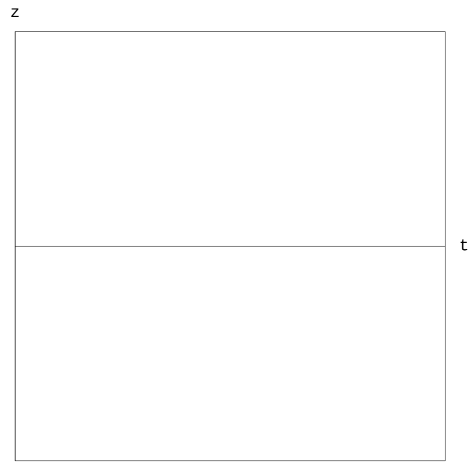
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -1 - x, \quad x(0) = 2. \tag{104}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = 1, \quad x(0) = 2. \tag{105}$$

5.3 空気抵抗のある場合の落下運動

鉛直上向きに z 軸をとる．質量 m．運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg - k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \tag{106}$$



あるいは, $v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ に対して,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -g - \frac{k}{m}v(t). \tag{107}$$

こ
れを解こう．

$$v(t) = \boxed{} \tag{108}$$

$t \to \infty$ で $v(t) \to -mg/k$．これを**終端速度**という．$0(= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)) = -g - \frac{k}{m}v(t)$ を解いても得られる．

$$z(t) = C_2 - \frac{mg}{k}t + C_1 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{109}$$

例題 16 質量 m の物体を, 時刻 $t = 0$ に, 位置 z_0 から, 鉛直上方に初速 v_0 で打ち出した. 物体には, 重力 (重力加速度は v) と, 速度に比例する空気抵抗 (比例定数 k) がはたらいている. 物体の運動を求めよ.

5.4 空気抵抗のある場合の放物運動

鉛直上向きに z 軸, 水平方向に x 軸をとる. 質量 m. z 軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_z$ とかくと, 運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\vec{e}_z - k\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t) \tag{110}$$

成分で書いて,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t), \tag{111}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg - k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \tag{112}$$

あるいは,

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(t) = -\,kv_x(t), \tag{113}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}(t) = -\,mg - kv_z(t). \tag{114}$$

各々解けばよい.

$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}, \tag{115}$$

$$z(t) = C_3 - \frac{mg}{k}t + C_4\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{116}$$