

## 力学 (≒ 物理数学 II) の問題の解き方

1. 問題の設定を読んで, 物体の運動が何次元でおきるか考える.
2. 運動方程式を次元の数だけたてる. 左辺は,  $m \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $m \frac{d^2z}{dt^2}$  など. 右辺は, その方向の力.  
 この段階では, 初期条件は使わない. 力と初期条件を混同しない.  
 力は, 具体的な形が式で与えられていることもあるし, 重力, 空気抵抗の力, ばねの力です, とだけ書いてあって, 形は (物理的な知識から) 自分で考えなくてはならないこともある.
3. 初期条件を書く. 特定の時刻の, 位置, 速度, を与えているのが初期条件. ない場合は気にしない.  
 特定の時刻の加速度は初期条件ではないそれは, 力から運動方程式を通じて決まる.
4. このステップは数学. 微分方程式を解いて  $x(t), \dots$  を求める. 次元の数  $\times 2$  個の積分定数が残るはず.
5. このステップも数学. 初期条件を使って, 積分定数を決める. 初期条件がなければ, 積分定数のまま残しておく.  
 運動を求めよ, というのでおしまいの問題だったら, このステップはない.
6. このステップは物理数学 I. 求めた  $x(t)$  から, 問いに答える (壁を越えるか?, 最高の高さは? 等)

## quiz の解答

1. 1次元の運動なので、時刻  $t$  の座標を  $x(t)$  とする.

2. 運動方程式は,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = k \left| \frac{dx}{dt}(t) \right|^3 \times \begin{cases} (-1) & (\frac{dx}{dt}(t) > 0) \\ (+1) & (\frac{dx}{dt}(t) < 0) \end{cases} = -k \left( \frac{dx}{dt}(t) \right)^3. \quad (149)$$

3. (初期条件はない)

4.  $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$  とおいて,

$$\frac{dv}{dt}(t) = -\frac{k}{m} v(t)^3. \quad (150)$$

これは変数分離形.

$$\int \frac{1}{v^3} dv = - \int \frac{k}{m} dt$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{v^2} = -\frac{k}{m} t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$v(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2k}{m} t - 2C}} = \pm \sqrt{\frac{m}{2k}} \frac{1}{\sqrt{t + C_1}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} v_\infty = 0. \quad (C_1 = -\frac{m}{2k})$$

$v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$  なので, 両辺積分して,

$$x(t) = \pm \sqrt{\frac{m}{2k}} \times 2 \times \sqrt{t + C_1} + C_2. \quad (151)$$

5. (初期条件はないので  $C_1, C_2$  はそのまま)

6. (問いはないが, 例えば  $t \rightarrow \infty$  での速度をきかれたら, 0).

(ここからは, 別の問題設定)

重力  $mg$  が働くとき,

$$\frac{dv}{dt}(t) = -g - \frac{k}{m}v(t)^3. \quad (152)$$

となり, これは簡単には解けないが, 左辺=0 とおいて終端速度  $v_\infty$  を求めると,

$$v_\infty = - \left( \frac{mg}{k} \right)^{1/3} \quad (153)$$

となる.

## 6 摩擦力

佐本 4.3

力を受けずに、なめらかでない (=粗い) 面上を運動する物体は、だんだん速さが遅くなり、最後は止まってしまう。これは、ニュートンの第1法則に反するように見えるが、実は、粗い面が物体に、

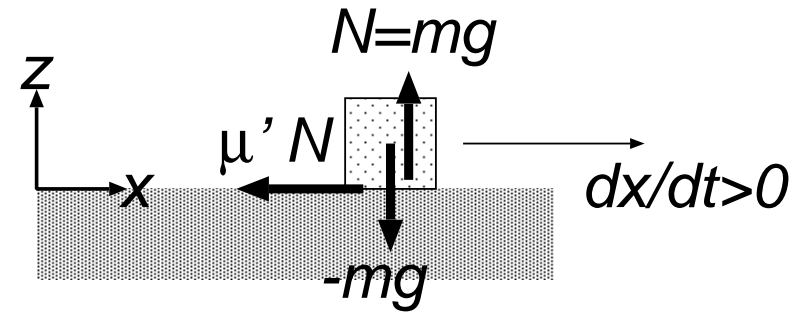
**摩擦力 (動摩擦力)** を及ぼしているためである。

動摩擦力は、速さを減らすようにはたらき、大きさは、

**垂直抗力  $N$**  に比例する。比例定数  $\mu'$  は **動摩擦係数** とよばれ、面の性質、物体と面の接する面積などによってきまる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = \begin{cases} -\mu' N & (\frac{dx}{dt}(t) > 0) \\ 0 & (\frac{dx}{dt}(t) = 0) \\ +\mu' N & (\frac{dx}{dt}(t) < 0) \end{cases} \quad (154)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2}(t) = -mg + N \quad z(t) \equiv 0 \rightsquigarrow N = mg \quad (155)$$



$N$ : 垂直抗力 (面が物体に及ぼす力)

**例題 20** 水平な粗い面の上をすべる質量  $m$  の物体を考える. 水平方向に  $x$  軸, 鉛直方向に  $z$  軸を取る. 時刻  $t = 0$  に初速度  $(v_x, v_z) = (v_0, 0)$ ,  $v_0 > 0$  で原点から水平に物体を発射したところ, 一直線上を運動した. 物体にはたらく力は重力と動摩擦力だけだった. 水平, 鉛直それぞれの方向の運動方程式をたて, 時刻  $t = 0$  以降の物体の運動を求めよ. 特に, 物体が静止するまでに進む距離を求めよ. ただし, 物体と面の間の動摩擦係数を  $\mu'$  とする.

垂直抗力の大きさを  $N$  として, 運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -\mu' N \quad (156)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2}(t) = -mg + N \quad (157)$$

初期条件は,  $\frac{dx}{dt}(0) = v_0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\frac{dz}{dt}(0) = 0$ ,  $z(0) = 0$ .

物体は面を離れないので,  $z(t) \equiv 0$  より  $N = mg$  となり,  $\frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -\mu' g$  (158)

積分すると,  $\frac{dx}{dt}(t) = -\mu' g t + C_1$ ,  $x(t) = -\frac{1}{2} \mu' g t^2 + C_1 t + C_2$ . ( $C_1, C_2$  は積分定数) (159)

初期条件より,  $x(t) = -\frac{1}{2} \mu' g t^2 + v_0 t$ . (160)

物体が静止する時刻  $t = T$  は  $\frac{dx}{dt}(T) = 0$  から決まり,  $T = \frac{v_0}{\mu' g}$ . それまでに物体の進んだ距離は,

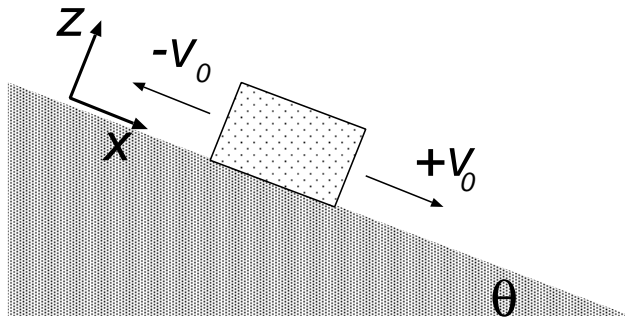
$$x(T) - x(0) = \frac{v_0^2}{2\mu' g}. \quad (161)$$

佐本 4.3, 4.2

**例題 21** 水平から角度  $\theta$  だけ傾いた粗い面の上をすべる質量  $m$  の物体を考える. 図のように, 斜面と平行な方向に  $x$  軸, それと垂直な方向に  $z$  軸を取る.

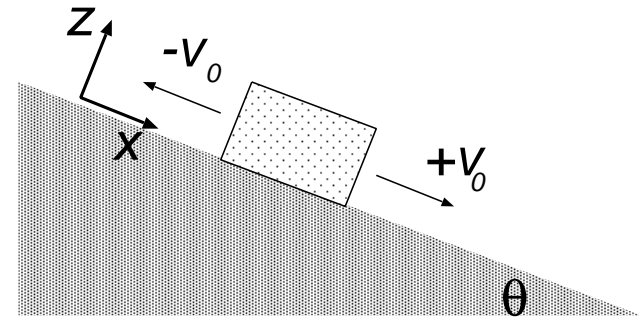
時刻  $t = 0$  に初速度の大きさ  $v_0$  で物体を斜面にそって下向きに発射した.  $x, z$  それぞれの方向の運動方程式をたて, 時刻  $t = 0$  以降の物体の運動を求めよ.

特に, 物体が斜面の途中で止まるための場合の,  $\theta$  に対する条件を求めよ. 斜面は十分長いとする. 物体と面との間の動摩擦係数を  $\mu'$  とする.



## quiz

前の問いで、物体を斜面にそって上向きに発射した場合の運動を求めよ。特に、物体が止まるまでに登る高さを求めよ。



## 注: 静止摩擦力

上では、物体が動いている状況を考えた。

一方、粗い面上に止まっている物体は、小さい力で押しでも動き出さない。これは、加えた力と反対方向に **静止摩擦力** が働くためである。

静止摩擦力の大きさは、**最大でも**  $\mu N$  である。ここで  $\mu$

は **静止摩擦係数** とよばれる比例係数。最大静止摩擦力より大きな力を加えて初めて、物体は動き始める。

静止摩擦力は重要だが、ここでは扱わない。

## 通信欄, アンケートの一部への回答とコメント

(返事のほしい質問は直接きいた方が速いです. これ以外でも直接きいてくれればお答えします)

例題などの解答がほしい. 復習用の問題/解答がほしい.

とばした例題は, 全員やっておくのが当然, という意味ではありません. が, 時間があればやってみてください. 問題/解答が欲しければ, 指定した参考書の問題や, 力学の問題集 (例えば, 物理入門コース演習 例解力学演習 (岩波)) からとれば? なお, やった分の quiz の解答は配るつもりです.

板書とプリントの対応がとりづらい. やった範囲が分かりにくい.

認識しています. 本当は十分大きな字で写るプロジェクターでやるのが理想的なのですが. 部分的対策として, やっとところを残してそれ以外を削除したプリントを Web に置こうかと思っています (ただし, 章番号や式番号は食い違ってしまう...)

... にもっと時間をかけてほしい

全般的に時間が不足しています. それぞれにもっと時間をかけられるとよいのですが, そのためにはどこかを削らなくてはなりません. 調整してみます. (なお, この講義の内容は, 樋口が趣味で選んでいるのではなくて, 2年生以降の科目に正しくつながるために, これだけの内容を説明するように, という決まりがあるのです. なので, 簡単に内容を減らすわけにはいかないのです)

成績のつけかたは.

変更ありません. (出席+quiz):小テスト 1(11/12):小テスト 2(12/10):期末試験=10:20:20:50.