例題 21 の解答

垂直抗力を N とすると, 速度が $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) > 0$ なので, 摩擦力は $-\mu' N$ となり, 運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\mu' N + mg\sin\theta, \tag{162}$$

$$m\frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t^2}(t) = N - mg\cos\theta. \tag{163}$$

となる. 初期条件は, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 0, x(0) = 0, z(0) = 0$. ここで, $z(t) \equiv 0$ から z 方向の方程式より $N = mg\cos\theta$. よって,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta). \tag{164}$$

これを積分して,

$$x(t) = \frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t^2 + C_1t + C_2. \qquad (C_1, C_2\text{は積分定数}) \tag{165}$$

初期条件より,

$$x(t) = \frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t^2 + v_0t. \tag{166}$$

考え方 1

$t \to \infty$ で, $x(t) \to \infty$ となるのは,

$$\sin\theta - \mu'\cos\theta \geq 0 \tag{167}$$

のとき. よって, 途中で止まるのは, $\sin\theta - \mu'\cos\theta < 0$ すなわち, $\tan\theta < \mu'$ のとき.

注. $\tan\theta < \mu'$ **のとき**, $x(t) \to -\infty$ **のように** (**坂を登ってように**) **見えるがこれはみかけ上**. **下の注意参照**.

考え方 2

止まる時刻 T **を**, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) = 0$ **より求めると**, $T = -\frac{v_0}{g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)}$. **これが** $T > 0$ **を満たさないと不適なので**, **途中で止まるのは**, $\tan\theta < \mu'$ **のとき**.

注. $\tan\theta < (>)\mu'$ **のとき**, $t = T$ **以後** (**以前**) **は**, $x(t)$ **は減少**, **すなわち坂を登っているように見える**. **が**, **これは見掛け上 のこと**. $t = T$ **の以後** (**以前**) **に** $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) \leq 0$ **となり**, **摩擦力を**, $-\mu' N$ **としてたてた運動方程式が成立しなくなる**.

考え方 3

物体の受ける x **方向の力は一定で**,

$$g(\sin\theta - \mu'\cos\theta). \tag{168}$$

これが正ならいつかは止まるので, **止まるのは**, $\tan\theta < \mu'$ **のとき**.

quiz の解答

運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}(t) = +\mu' N + mg\sin\theta, \tag{169}$$

$$m\frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t^2}(t) = N - mg\cos\theta. \tag{170}$$

($\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) < 0$ **なので**, **動摩擦力が** $+\mu' N$ **となることに注意**.), **初期条件は**, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -v_0 < 0$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 0$, $x(0) = 0, z(0) = 0$. **積分して**,

$$x(t) = \frac{1}{2}g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)t^2 - v_0 t. \tag{171}$$

止まる時刻を $t = T$ **とすると**, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) = 0$ **を解いて**, $T = \frac{v_0}{g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)}$. **この間に登った高さは**,

$$-\sin\theta\cdot(x(T) - x(0)) = \frac{v_0^2\sin\theta}{2g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)} = \frac{v_0^2}{2g}\cdot\frac{1}{1 + \mu'\cot\theta}. \tag{172}$$

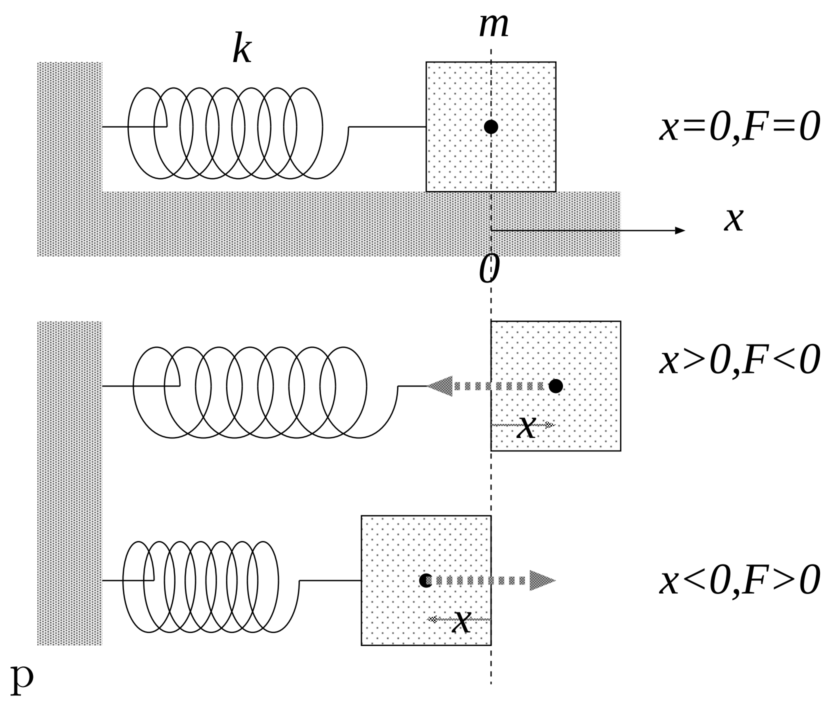
7 単振動 (調和振動)

佐本 4.4

バネの先についた物体 (質量 m) の運動を考えよう.

自然長: 力が加わっていないときのバネの長さ

変位: $x(t) =$ (変化後のバネの長さ) $-$ (自然長)



$$\text{バネの復元力}\quad F = -k \times x(t) \quad \text{(フックの法則)} \tag{173}$$

$k > 0$: バネ定数. バネの強さを表す.

大きさは変位に比例.

変位を小さくするようにはたらく (だからマイナス).

運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t). \tag{174}$$

すなわち

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega^2 x(t) = 0. \qquad (\omega = \sqrt{k/m}) \tag{175}$$

これを解こう.

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{176}$$

は解になっている.

なぜなら

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)) \tag{177}$$

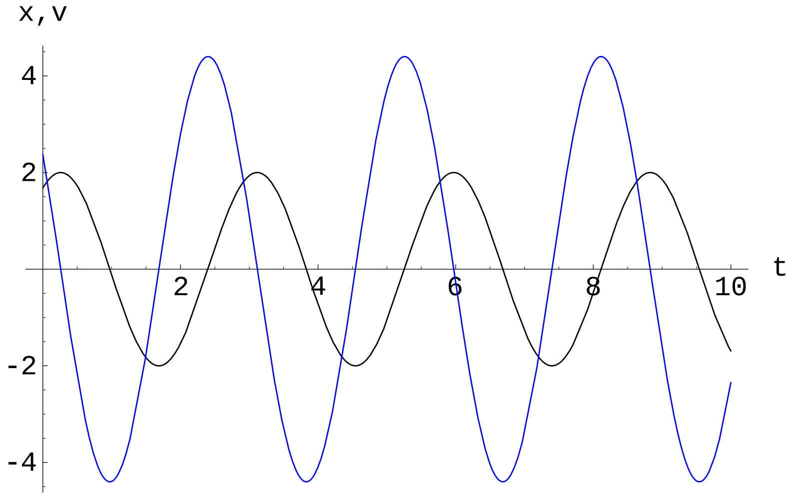
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-C_1\omega\sin(\omega t) + C_2\omega\cos(\omega t)) \tag{178}$$

$$= (-C_1\omega^2\cos(\omega t) - C_2\omega^2\sin(\omega t)) \tag{179}$$

$$= -\omega^2(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t))) = -\omega^2 x(t). \tag{180}$$

実は, これ以外の解はない (来年, 数理モデル基礎 I で学ぶ).

このような振動を $\boxed{\text{単振動 (調和振動)}}$ という.



$$\sin\theta_0 = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$$
$$\cos\theta_0 = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$$

を満たすように θ_0 を定めると,

$$\begin{aligned} x(t) =& C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) \\ =& \sqrt{C_1^2+C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos(\omega t) + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin(\omega t)\right) \\ =& \sqrt{C_1^2+C_2^2}(\sin\theta_0\cos(\omega t) + \cos\theta_0\sin(\omega t)) = (\textbf{加法定理}) = A\sin(\omega t+\theta_0). \end{aligned}$$

振幅 $A = \sqrt{C_1^2+C_2^2}$ [m]

位相 $\omega t + \theta_0$ [rad]

初期位相 θ_0 ($\tan\theta_0 = \frac{C_1}{C_2}$)

ω: (**単位時間に進む位相**)[rad/s]

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ ($\omega T = 2\pi$ **ごとに戻るから**.) [s]

$\nu = f = 1/T$ (**単位時間あたり何周期**?).[1/s]

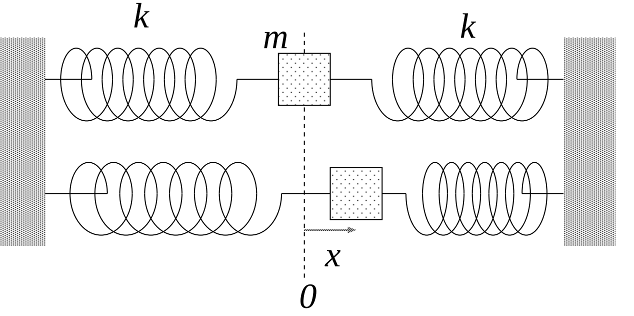
(C_1, C_2), (A, θ_0) **はどちらも積分定数**.

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= A\sin\theta_0 \\ C_2 &= A\cos\theta_0 \end{aligned}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} A &= \sqrt{C_1^2+C_2^2} \\ \theta_0 &= \arctan\frac{C_1}{C_2} \end{aligned}\right.$$

例題 22 バネ定数 k のバネの先に質量 m の物体がついている．変位を $x(t)$ とするとき，$x(0)=0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=1$ だった．$x(t)$ を求めよ．

例題 23 バネ定数 k のバネの先に質量 m の物体のついているバネ 1 と，バネ定数 $2k$ のバネの先に質量 $3m$ の物体のついているバネ 2 とがある．それぞれ，角振動数と周期を求めよ．

例題 24 質量 m の物体に，バネ定数 k のバネを 2 つつなぎ，自然長で両端を固定する．変位 $x(t)$ の満たす微分方程式を求めよ．



quiz

1. 微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -8x(t) \tag{181}$$

を, 初期条件 $x(0) = 1$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -1$ のもとで解け.

2. バネ定数 k のバネの先に, 質量 m の物体がついている. 時刻 $t = 0$ に, バネを, 自然長よりも長さ ℓ だけ引き延ばして静かに離した. $t = 0$ 以降の運動を求め, グラフに書け.

小テスト 2 のお知らせ

日時 12 月 10 日 (月) 15:10–15:55

場所 1-107 講義室. 座席指定します.

成績 この試験の成績は, 後期の成績 100 点のうち 20 点を占めます.

試験範囲 変数分離型微分方程式. 重力, 空気抵抗の力, 摩擦力のもとでの運動. 斜面に沿う運動.