前回の quiz の解答

1. 微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{1}$$

の解は，$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ で，いまは，$\omega^2 = 8$ の場合である．よって解は，C_1, C_2 を積分定数として，

$$x(t) = C_1 \cos(2\sqrt{2}t) + C_2 \sin(2\sqrt{2}t) \tag{2}$$

このとき，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2\sqrt{2}(-C_1 \sin(2\sqrt{2}t) + C_2 \cos(2\sqrt{2}t)). \tag{3}$$

初期条件より，

$$\begin{aligned} 1 = x(0) &= C_1 \cos(2\sqrt{2}\cdot 0) + C_2 \sin(2\sqrt{2}\cdot 0) = C_1, \\ -1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) &= 2\sqrt{2}\cdot(-C_1 \sin(2\sqrt{2}\cdot 0) + C_2 \cos(2\sqrt{2}\cdot 0)) = 2\sqrt{2}C_2. \end{aligned}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x(t) = \cos(2\sqrt{2}t) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2}t) \tag{4}$$

これで十分な答えになっているが，次の形にも変形できる．

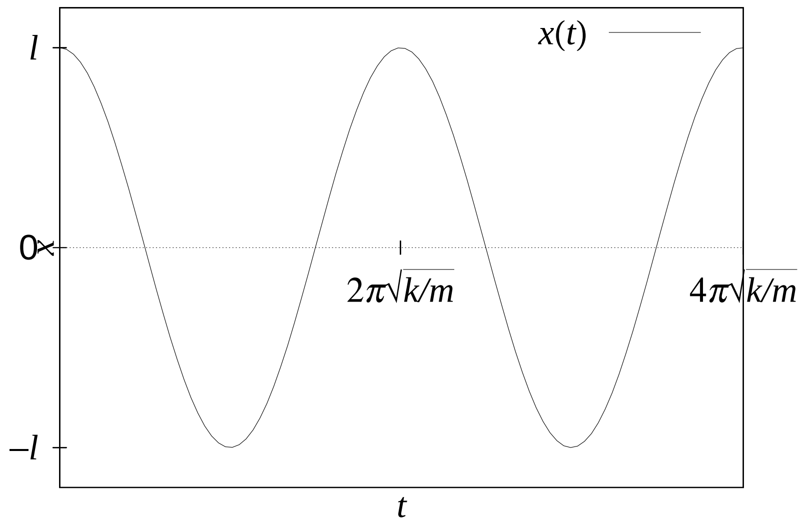
$$x(t) = \sqrt{\frac{9}{8}}\sin(2\sqrt{2}t + \theta_0), \quad \theta_0 = \arctan(-2\sqrt{2}). \tag{5}$$

2. **自然長からの変位を** $x(t)$ **とすると，運動方程式は**

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t). \tag{6}$$

初期条件は， $x(t) = \ell$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$. **この解は，上と同様に，**

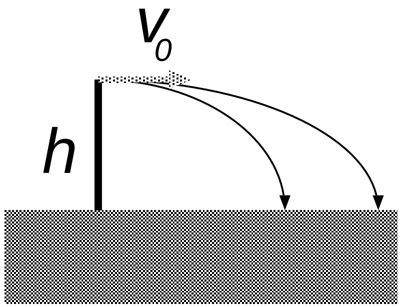
$$x(t) = \ell\cos(\sqrt{k/m}\cdot t). \tag{7}$$



問題

次のうち，人間がいちばん遠くまで投げられるのは?(大きさは同じ)

- 5kg 砲丸
- ソフトボール
- 発泡スチロールの玉



高校物理的解答

高さ h のところから，横方向に 速度 v_0 で投げるとする．

地表に落下するまでの時間 t は，落下運動の公式から，

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \text{ より } t = \sqrt{2h/g}. \tag{8}$$

横方向には，等速直線運動なので，この間に，$v_0 \times \sqrt{2h/g}$ だけ進む．よって，どれも同じ距離だけ飛ぶ．

うそ.

人間の腕の構造上，v_0(砲丸) $< v_0$(ソフトボール)

だからソフトボールのほうが飛ぶ.

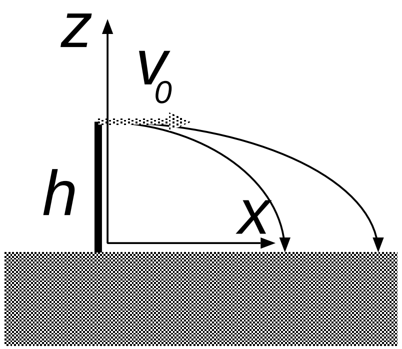
では発泡スチロールの玉は?　v_0(発泡スチロール) $= v_0$(ソフトボール)

速度 $\vec{v}$ に比例する空気抵抗 $-k\vec{v}$ がはたらくとすると，運動方程式は

$$(ma = F)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t), \qquad (9)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) - mg \qquad (10)$$



初期条件は，$x(0) = 0, z(0) = h, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 0.$

重要 比例定数 k は，同じ　　　　　　　　の物体なら同じ.

　　　　　にはよらない.

(9) を解こう．$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおくと，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{k}{m}v(t)$$

$$\left(\boxed{\times\ \text{間違い}}\ \int \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\int \frac{k}{m}v\mathrm{d}v\right)$$

$$\frac{1}{v}\mathrm{d}v = -\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1}{v}\mathrm{d}v = -\int \frac{k}{m}\mathrm{d}t + C \quad (C\ \text{は積分定数})$$

$$\log|v(t)| = -\frac{k}{m}t + C$$

$$|v(t)| = \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t+C} = \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{e}^{C}$$

$$v(t) = \pm\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} = C_1\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

初期条件 $v(0) = v_0$ より，$C_1 = v_0$．もう一度積分して，

$$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t = -\frac{mv_0}{k}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + C_2 \tag{11}$$

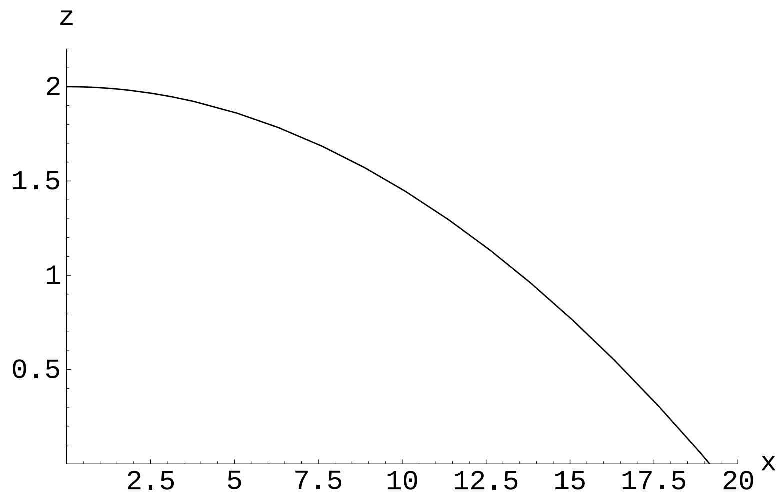
初期条件 $x(0)=0$ **より**，$C_2=+\frac{mv_0}{k}$.

$$x(t)=\frac{mv_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}) \tag{12}$$

空気抵抗が無い場合とは，少し違う考え方をしよう．h **が十分大きければ** (**東京タワーの上から投げた**!)，**着地する時刻** t **は非常に大きいはず**.

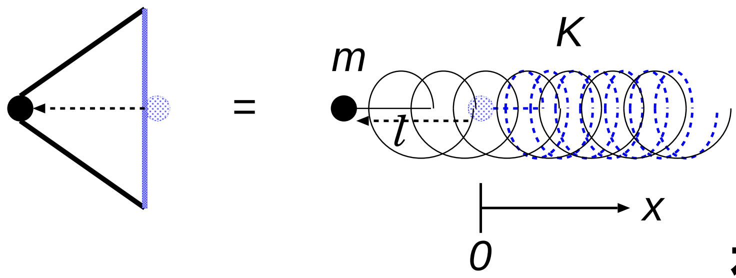
そこで，$t\to\infty$ **を考えよう**.$\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\to 0$ **より**，

$$x(t)\to \boxed{} \tag{13}$$



確かに，m **が大きい方が遠くまで届く**.

人間の手は不確か．パチンコで打ち出してみよう．
バネ定数を K, ℓ だけ引き絞ってそっと
手を放したとする．運動方程式は



$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -Kx(t). \qquad (14)$$

初期条件 $x(0) = -\ell, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0.$ 先週やったように解くと，

$$x(t) = C_1\cos(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t) + C_2\sin(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t) \to x(t) = -\ell\cos(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t).$$

$x(T) = 0$ となった瞬間に，ボールはパチンコを離れ，力を受けなくなる．

その時刻は$\sqrt{\frac{K}{m}}T = \pi/2 \rightsquigarrow T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{K}}.$

その瞬間の速度 $v_0 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) = \ell\sqrt{\frac{K}{m}}\sin(\frac{\pi}{2}) = \ell\sqrt{\frac{K}{m}}.$

飛ぶ距離