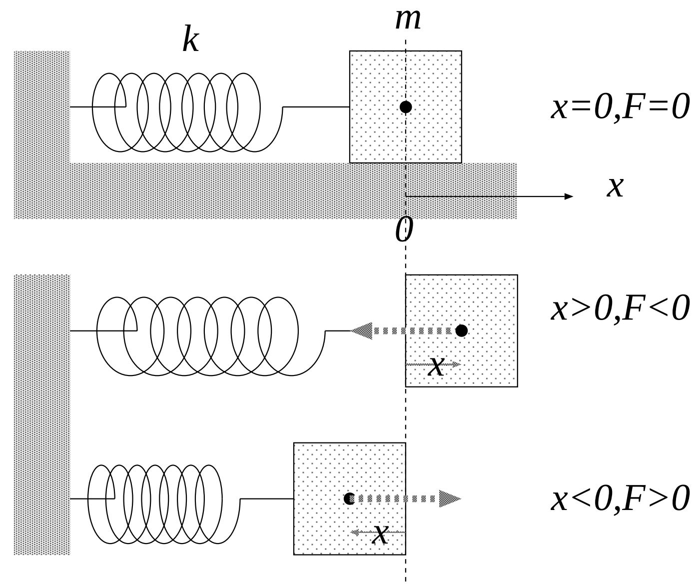
8 減衰振動と複素数

8.1 単振動の復習

バネ (**バネ定数** k) **の先についた**, **質量** m **の物体の運動方程式は**

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t). \tag{15}$$



$m = k = 1$ **と思うと**,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + x(t) = 0.$$

解は $x(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t)$.　$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -C_1\sin(t) + C_2\cos(t). \tag{16}$$

初期条件 $x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ **を課すと**, $C_1 = 1, C_2 = 0$.

$$x(0) = C_1 = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -C_2 = 0 \rightsquigarrow x(t) = \cos t. \tag{17}$$

8.2 空気抵抗を受けるバネ: 減衰振動

速度に比例する空気抵抗 $-c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ もある場合を考えよう.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{19}$$

このような運動を 減衰振動 という.

一般に,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + a\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + b\cdot x(t) = 0. \quad (a,b \text{ は定数}) \tag{20}$$

というタイプの微分方程式を考えよう.

例題 1

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+3\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+2\cdot x(t)=0. \qquad x(0)=1,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=0. \tag{21}$$

1

$$x(t)=2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \tag{22}$$

quiz 1 配った紙にやってね.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+2\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)-3\cdot x(t)=0. \qquad x(0)=0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=4 \tag{23}$$

8.3 虚数の指数関数

'$x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$' とおく, は便利. 単振動にも使えないか?

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+x(t)=0, \qquad x(0)=1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=0 \tag{24}$$

は, $a=0, b=1$ の場合. やってみよう.

$x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいてみる.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}$$

$$\text{よって}\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+x(t)=(\lambda^2+1)\mathrm{e}^{\lambda t}=0.$$

$\lambda^2+1=0 \rightsquigarrow \lambda=\pm i$ (?????)

虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ は $i^2=-1$ を満たす. 複素数 $x+iy$ の i.

知らん顔して計算すると,

$$x(t)=D_1\mathrm{e}^{it}+D_2\mathrm{e}^{-it}. \tag{25}$$

は解. 初期条件より,

$$x(0)=D_1\mathrm{e}^{i0}+D_2\mathrm{e}^{-i0}=D_1+D_2=1. \tag{26}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=iD_1\mathrm{e}^{it}-iD_2\mathrm{e}^{-it}\text{だから}\right) \tag{27}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=iD_1\mathrm{e}^{i0}-iD_2\mathrm{e}^{-i0}=iD_1-iD_2=0. \tag{28}$$

ここで $\mathrm{e}^0=1$ を使った.

解いて, $D_1=D_2=\frac{1}{2}$.

この解は $x(t) = \cos t$ だったはず.

$$x(t) = \cos t \stackrel{?}{=} \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{it} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-it}. \tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\sin t \stackrel{?}{=} \tfrac{i}{2}\mathrm{e}^{it} - \tfrac{i}{2}\mathrm{e}^{-it}. \tag{30}$$

したがって,

$$(\text{上}) + \frac{1}{i}\cdot(\text{下}) = \cos t + i\sin t \stackrel{?}{=} \mathrm{e}^{it}. \tag{31}$$

8.4 オイラーの公式

気分のために t を θ とかく.

定義. 実数 θ に対して

$$\boxed{\;2\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;} \cdots \boxed{\text{オイラーの公式}} \tag{32}$$

定義. 複素数 $z = a + i\theta$ (a と θ は実数) に対して,

$$\boxed{\;3\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;} \tag{33}$$

3 年で関数論を学ぶと, これで ‘よい’ というのが心から納得できます.

性質. 複素数 $z = x + iy, w = u + iv$ に対して,

$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^{x+iy+u+iv} = \mathrm{e}^{(x+u)+i(y+v)} = \mathrm{e}^{x+u}\mathrm{e}^{i(y+v)} \tag{34}$$

$$= \mathrm{e}^{x+u}(\cos(y+v) + i\sin(y+v)) = \cdots(\textbf{加法定理}) = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{y}\mathrm{e}^{iy}\mathrm{e}^{iv} = \mathrm{e}^{z} \times \mathrm{e}^{w} \tag{35}$$

例題 2 $z = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i}, z^2, z^{100}, 1/z$ **の実部, 虚部を求めよ.**

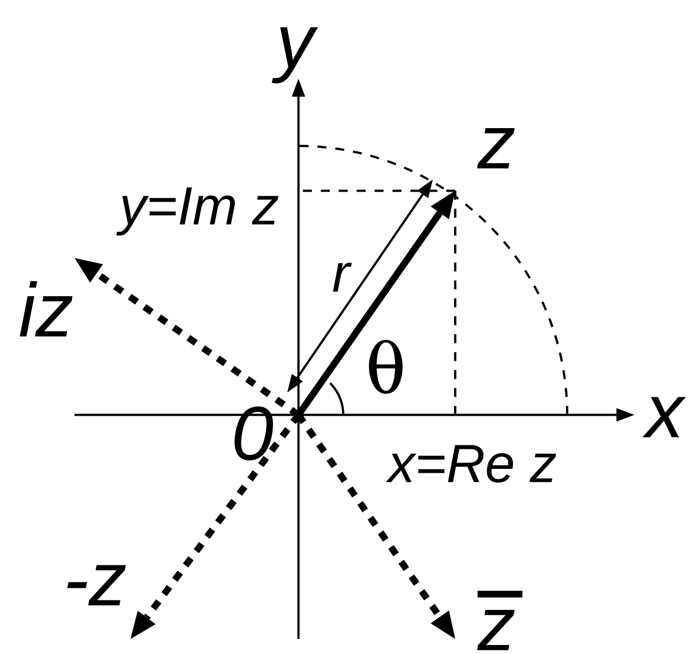
4

$z = x + iy$ **は足し算が得意.** $z = \mathrm{e}^{a+i\theta}$ **は掛け算が得意.**

8.5 極表示

x, y, r, θ は実数, $r \geq 0$.

		普通の表示	極表示
複素数	z	$=x+iy$	$=re^{i\theta}$
実部	$\mathrm{Re}\,z$	$=x$	$=r\cos\theta$
虚部	$\mathrm{Im}\,z$	$=y$	$=r\sin\theta$
絶対値	$\lvert z\rvert$	$=\sqrt{x^2+y^2}$	$=r(\geq 0)$
偏角	$\arg z$	$=\arctan\frac{y}{x}$	$=\theta$
複素共役	$\bar{z}$	$=x-iy$	$=re^{-i\theta}$



いくつかの公式

(定義に戻ればすぐに導けるのでおぼえなくてもOK).

$z = x + iy = re^{i\theta}$, $(x, y, r, \theta$ **は実数**.)

e^z の性質.

$$e^{2\pi i} = 1, e^{\pi i} = -1. \tag{36}$$

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} = e^x \tag{37}$$

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \quad \text{特に } \overline{e^{iy}} = e^{-iy}. \tag{38}$$

微分積分

$$\frac{d}{dt} e^{zt} = z e^{zt}. \tag{39}$$

$$\int e^{zt} dt = \frac{1}{z} e^{zt} + C. \tag{40}$$

オイラーの公式を逆に解いたもの

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \tag{41}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \tag{42}$$

複素共役, -1 倍, 逆数.

$$\bar{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}, \tag{43}$$

$$-z = -r(e^{i\theta}) = re^{i(\theta+\pi)}, \tag{44}$$

$$1/z = (re^{i\theta})^{-1} = (1/r)e^{-i\theta} \tag{45}$$

例題 3　微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) = 0. \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 1. \tag{46}$$

を, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ は一般には複素数) とおくことによって解け.

quiz 2

微分方程式を

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+16x(t)=0, \qquad x(0)=4, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-4. \tag{47}$$

を, $x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ は一般には複素数) とおくことによって解け.

お知らせ

小テスト 1,2 の追試のお知らせを掲示しています.

小テスト 2 解答訂正(すみません).

問 2(2) 積分定数きめる前は $\pm$ の可能性があります.

$x(t)=\boxed{\pm}(-4C-4t)^{-1/4}\rightsquigarrow$ 初期条件 $\rightsquigarrow(\frac{1}{16}-4t)^{-1/4}=\pm 2(1-\boxed{64}t)^{-1/4}$