先週の quiz 2

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて代入すると,

$$(\lambda^2 + 16)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{48}$$

よって, $\lambda^2 + 16 = 0$ より $\lambda = \pm 4i$ で, 解は

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{4it} + C_2 \mathrm{e}^{-4it}. \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数}) \tag{49}$$

初期条件より, $C_1 = 2 + \frac{i}{2}, C_2 = 2 - \frac{i}{2}$. となり,

$$x(t) = (2 + \tfrac{i}{2})\mathrm{e}^{4it} + (2 - \tfrac{i}{2})\mathrm{e}^{-4it} \tag{50}$$

$\theta = \pm 4t$ と思ってオイラーの公式 $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を使うと,

$$\begin{aligned} x(t) =& (2 + \tfrac{i}{2})(\cos 4t + i\sin 4t) + (2 - \tfrac{i}{2})(\cos(-4t) + i\sin(-4t)) \\ =& \cdots = (4\cos 4t - \sin 4t) + i \times 0. \end{aligned} \tag{51}$$

9 減衰振動, 臨界制動, 過減衰

9.1 復習

速度に比例する空気抵抗 $-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **もある場合を考えよう** ($\gamma > 0$, **定数**. **今まで よく** k **と書いてた**).

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\cdot x(t) - \gamma\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{52}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\gamma}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{53}$$

一般に,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + c\cdot x(t) = 0. \quad (b, c \text{ は定数}) \tag{54}$$

というタイプの微分方程式を解くには, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいて** λ **をきめる**.

虚数が出てきたら, $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (θ: **実数**. **オイラーの公式**).

例題 4

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 5 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{55}$$

1

$$x(t) = \mathrm{e}^{-2t} \times (1 \cdot \cos t + 2 \cdot \sin t). \tag{56}$$

9.2 特性方程式と解の分類

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + c \cdot x(t) = 0. \quad (b,c \text{ は定数}) \tag{57}$$

という微分方程式は, b, c の値に応じて異なるタイプの解を持つ.

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて代入.

$$(\lambda^2 + b\lambda + c)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{58}$$

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{59}$$

これは λ をきめる 2 次方程式.　$\cdots\cdots$ 2 .

3 $D = b^2 - 4c.$ (60)

解は, D の値によって分類される.

$\boxed{D > 0\ \text{のとき}}$ **2 実根.** $\lambda = \alpha, \beta($ $\alpha \neq \beta$, α, β **は実数**).

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\alpha t} + C_2 \mathrm{e}^{\beta t}. \tag{61}$$

$\boxed{D < 0\ \text{のとき}}$ **互いに複素共役な 2 複素根.** $\lambda = \mu \pm i\omega$. ($\mu, \omega$ **は実数**).

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{(\mu + i\omega)t} + C_2 \mathrm{e}^{(\mu - i\omega)t} \tag{62}$$

$$= \mathrm{e}^{\mu t}(C_1 \mathrm{e}^{i\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-i\omega t}) \tag{63}$$

$$= \mathrm{e}^{\mu t}((C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t) \tag{64}$$

$$= \mathrm{e}^{\mu t}(D_1 \cos\omega t + D_2 \sin\omega t) \tag{65}$$

$\boxed{D = 0\ \text{のとき}}$ **重根.** $\lambda^2 + b\lambda + c = (\lambda + b/2)^2$. $\alpha = -b/2$ **は実数.**

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\alpha t}.??? \tag{66}$$

積分定数が 1 個しかないのはおかしい.

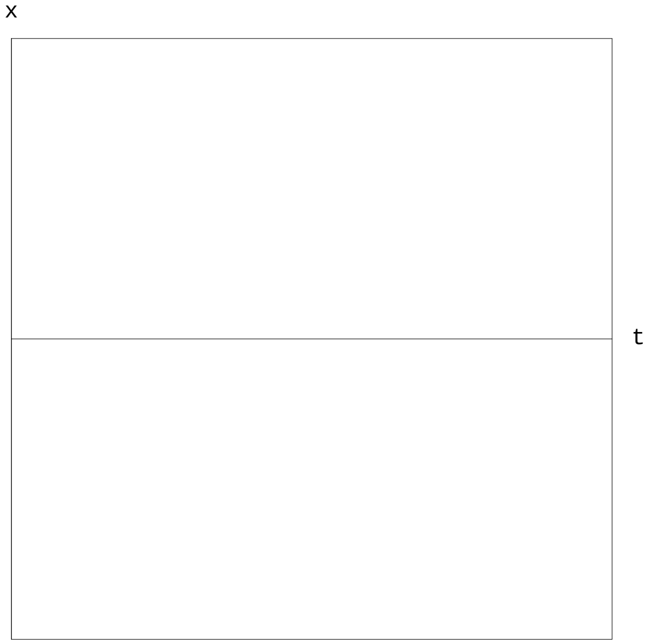
重要: $\boxed{4\qquad\qquad}$ **も解．なぜなら**

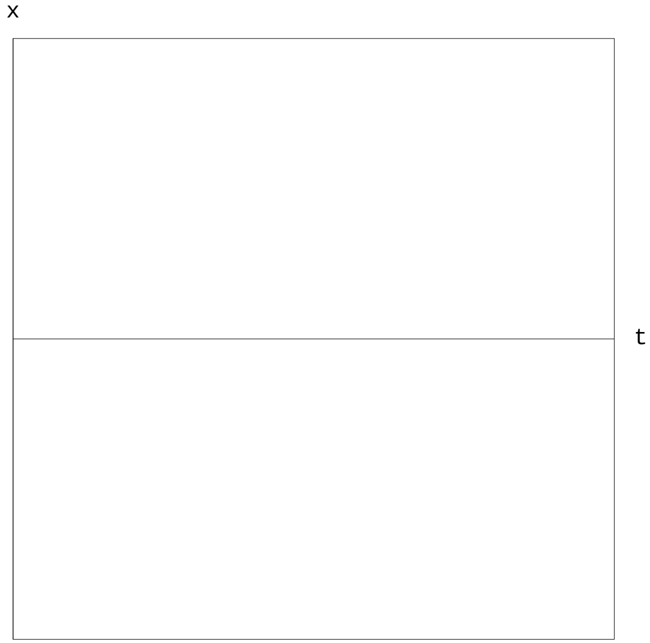
$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\times \mathrm{e}^{\alpha t}) =& (\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t)\mathrm{e}^{\alpha t} + t(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\alpha t}) = (1+\alpha t)\mathrm{e}^{\alpha t} \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(t\times \mathrm{e}^{\alpha t}) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(1+\alpha t)\mathrm{e}^{\alpha t}] \\
=& \boxed{5\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
=& (\alpha + (1+\alpha t)\alpha)\mathrm{e}^{\alpha t}\text{より}
\end{aligned}
$$

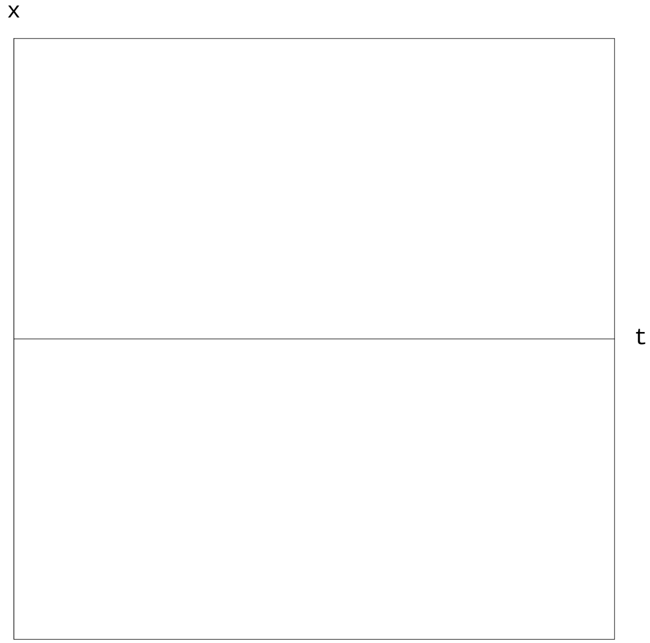
$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + cx(t) =& [(\alpha + (1+\alpha t)\alpha) + b(1+\alpha t) + c]\mathrm{e}^{\alpha t} \\
=& [(\alpha^2 + b\alpha + c)t + (2\alpha + b)]\mathrm{e}^{\alpha t} \\
=& [0\times t + 0]\mathrm{e}^{\alpha t} = 0.
\end{aligned}
$$

なぜなら, $\lambda=\alpha$ **は** $\lambda^2+b\lambda+c=0$ **の解**, **また**, $\alpha=-b/2$ **だから．この** 2 **つを加えたものも解で**, $\boxed{6\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

9.3 $D>0, D<0, D=0$ の解の様子







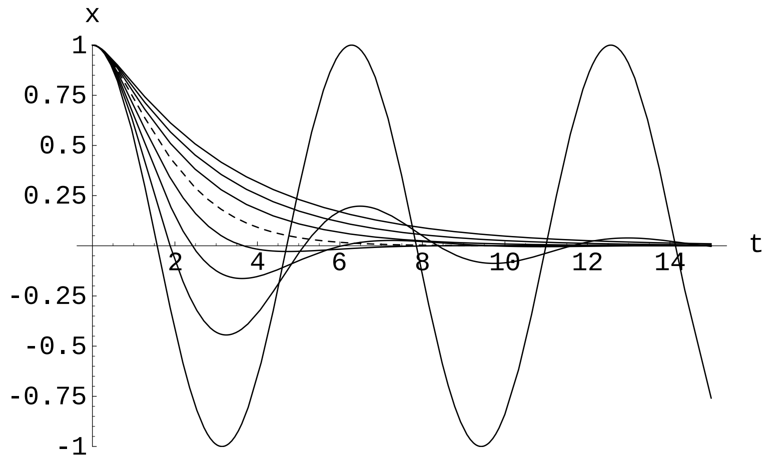
9.4 過減衰, 減衰振動, 臨界制動

速度に比例する空気抵抗 $-\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **のあるバネ**

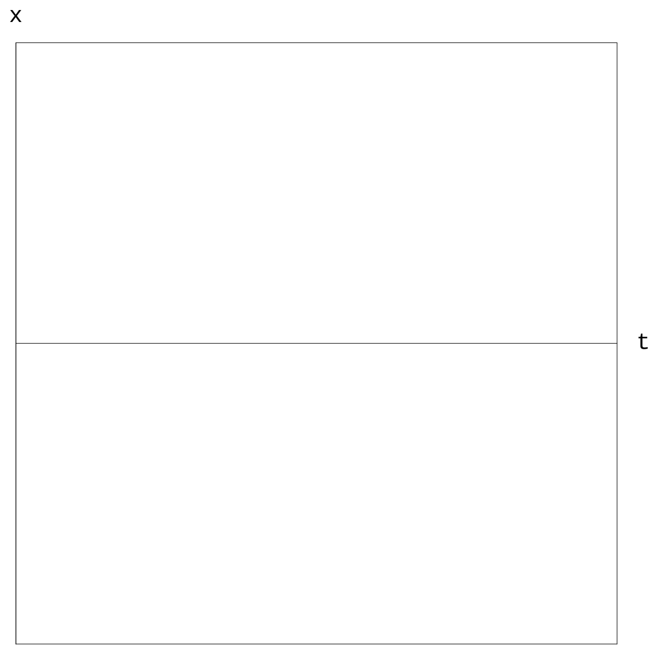
$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{67}$$

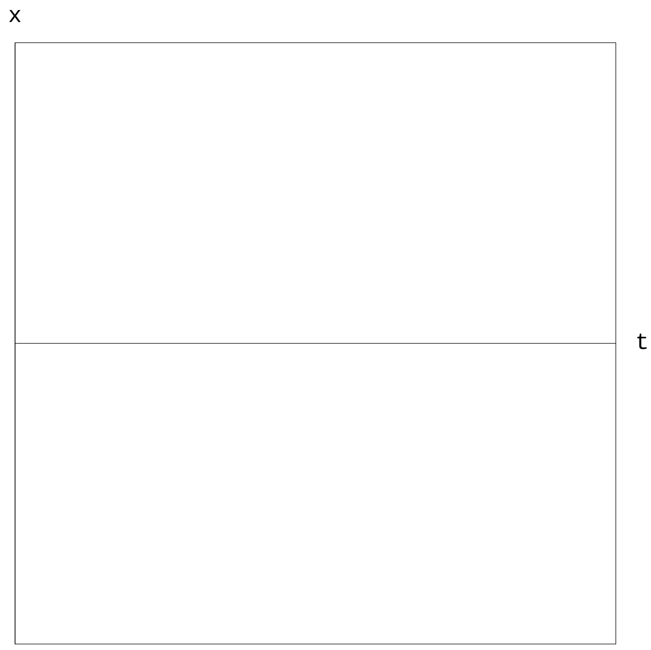
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\gamma}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{68}$$

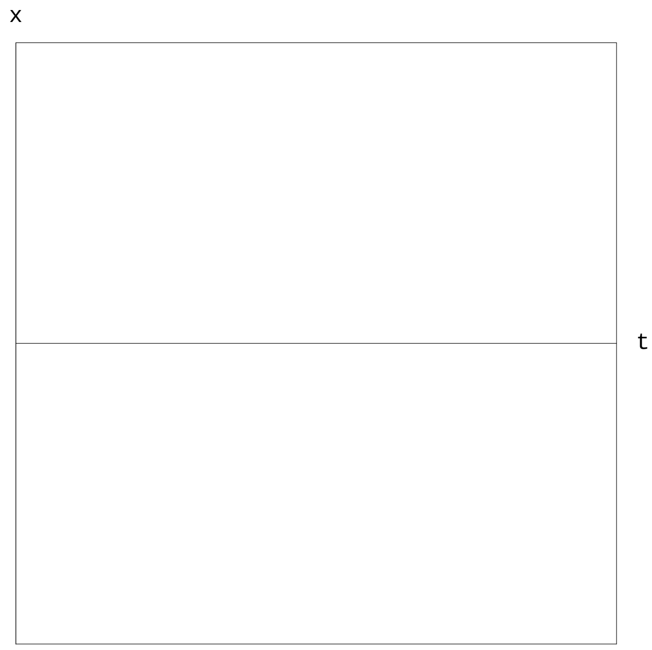
の場合には, $k > 0, \gamma > 0$. **特性方程式の判別式** $D = \frac{1}{m^2}(\gamma^2 - 4mk)$.



- **過減衰** $D > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{mk} < \gamma$
- **臨界制動** $D = 0 \Leftrightarrow \gamma = 2\sqrt{mk}$
- **減衰振動** $D < 0 \Leftrightarrow 0 < \gamma < 2\sqrt{mk}$







quiz 1 **配った紙にやってね.**

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 5\cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 4. \tag{69}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + x(t) = 0. \qquad x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{70}$$

10 エネルギー保存則とポテンシャルエネルギー

位置 x **だけで決まる力** $F(x)$ **を受けて** 1 **次元の運動をする**, **質量** m **の質点を考えよう**.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F(x(t)). \tag{71}$$

あてはまる例. **バネの力**.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t). \quad \text{すなわち} \quad F(x) = -k \cdot x. \tag{72}$$

そうでない例. **空気抵抗を受けるバネ**.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t) - \gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{73}$$

力 F **は**, x **と** v **の関数**. **場所** x **だけでは決まらない**.

(100) で $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおくと,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = F(x(t)). \tag{74}$$

誰かが思いついたトリック. 両辺に $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ をかける.

$$mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{75}$$

$$\int mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t = \int F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \tag{76}$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \text{ より, 左辺} = \int mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv^2 + C. \tag{77}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \text{ より, 右辺} = \int F(x)\mathrm{d}x. \tag{78}$$

関数 $U(x)$ **を, 力** $F(x)$ **から**

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' \tag{79}$$

で定義すると,

$$\frac{1}{2}mv^2 + C = -U(x).\text{すなわち}\,\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x) = E(\text{一定}.) \tag{80}$$

第 1 **項** $\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2$ **を質点の** **運動エネルギー** **という.**

(108) **で定義される第** 2 **項** $U(x)$ **を質点の** **ポテンシャル**, **または** **位置エネルギー** **という.**

逆に, 力 $F(x)$ **が** $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x)$ **で与えられるような関数** $U(x)$ **をポテンシャルという, と思ってもよい.**

両者の和 E **を,** **力学的エネルギー** **という.**

式 (109) は, 力 $F(x)$ のもとで, ニュートンの運動方程式にしたがって運動する質点については, 力学的エネルギー E が一定で変化しないことをいっている.

これを,

力学的エネルギーは 保存する (不変である)

力学的エネルギーは 保存量 である

などという.

例 重力のもとでの鉛直方向の運動. 高さを z とかく. $F(z) = mg$.

位置エネルギー
$$U(z) = -\int_0^z F(z)\,\mathrm{d}z' = -\int_0^z mg\,\mathrm{d}z' = mgz. \quad (81)$$

力学的エネルギーの保存
$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + mgz(t) = \text{一定}. \quad (82)$$

例 **バネの力のもとでの運動**. **自然長からの変位を** x **と書く**.

$F(x) = -kx$.

$$\textbf{位置エネルギー}\; U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = -\int_0^x (-kx')\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}kx^2. \tag{83}$$

$$\textbf{力学的エネルギーの保存} \quad \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}k(x(t))^2 = \textbf{一定}. \tag{84}$$