先週の quiz

- $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+5\cdot x(t)=0. \qquad x(0)=0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=4. \tag{85}$$

特性方程式は $\lambda^2+\lambda+5=0$. **よって**, $\lambda=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{19}i)$. **解は**

$$x(t)=C_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{19}i)t}+C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{19}i)t}. \tag{86}$$

初期条件から積分定数 C_1, C_2 **を決定する**.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=C_1\frac{-1+\sqrt{19}i}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{19}i)t}+C_2\frac{-1-\sqrt{19}i}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{19}i)t}. \tag{87}$$

より,

$$(x(0)=C_1\mathrm{e}^0+C_2\mathrm{e}^0=)C_1+C_2=0 \tag{88}$$

$$(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=)C_1\frac{1}{2}(-1+\sqrt{19}i)+C_2\frac{1}{2}(-1-\sqrt{19}i)=4 \tag{89}$$

これを解くと,

$$C_1 = -C_2 = \frac{4}{\sqrt{19}i}. \tag{90}$$

よって,

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \frac{4}{\sqrt{19}i} (\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(+\sqrt{19}i)t} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-\sqrt{19}i)t}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \frac{8}{\sqrt{19}} \sin \frac{\sqrt{19}}{2} t \tag{91}$$

- $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + x(t) = 0. \qquad x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{92}$$

特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. **これは重根** $\lambda = -1$ **を持つので**, e^{-t} **の他に**, $t \times \mathrm{e}^{-t}$ **も解になっている**. **よって**,

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 t \mathrm{e}^{-t}. \tag{93}$$

積分定数を C_1, C_2 **を初期条件から決定する**.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -C_1\mathrm{e}^{-t} + (C_2 - C_2 t)\mathrm{e}^{-t} \tag{94}$$

より,

$$x(0) = C_1\mathrm{e}^0 + C_2 0\mathrm{e}^0 = C_1 = 2. \tag{95}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -C_1\mathrm{e}^0 + (C_2 - C_2 0)\mathrm{e}^0 = -C_1 + C_2 = 0 \tag{96}$$

よって, $C_1 = C_2 = 2$.

$$x(t) = 2(1+t)\mathrm{e}^{-t}. \tag{97}$$

訂正．p.104(2002/01/07)　すみません．ページごと以下と入れ替えてください．

9.1 過減衰，減衰振動，臨界制動

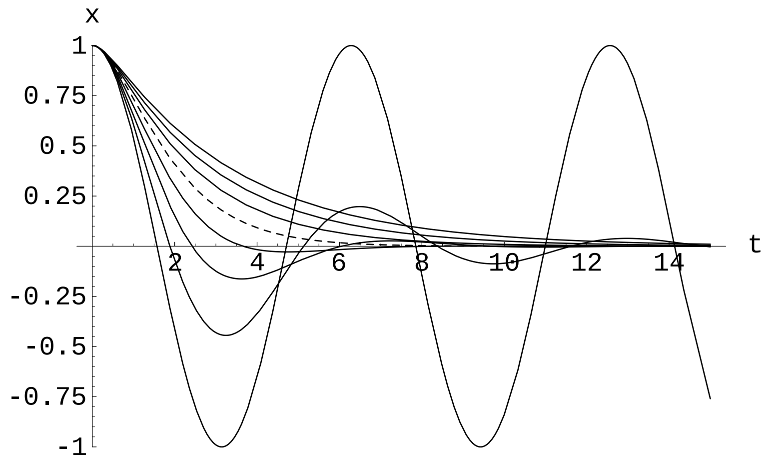
速度に比例する空気抵抗 $-\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **のあるバネ**

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - \gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{67}$$

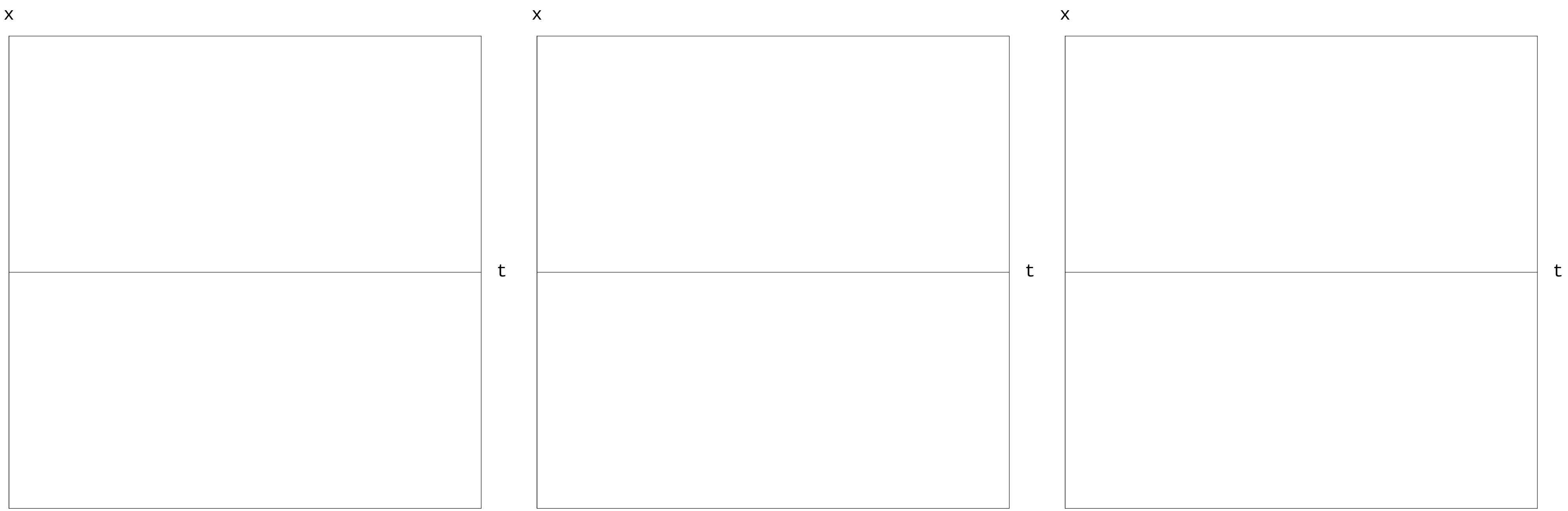
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\gamma}{m} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0. \tag{68}$$

の場合には, $k > 0, \gamma > 0$. **特性方程式の判別式** $D = \frac{1}{m^2}(\gamma^2 - 4mk)$.

訂正．p.105(2002/01/07)　すみません．ページごと以下と入れ替えてください．



- **過減衰** $D > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{mk} < \gamma$
- **臨界制動** $D = 0 \Leftrightarrow \gamma = 2\sqrt{mk}$
- **減衰振動** $D < 0 \Leftrightarrow 0 < \gamma < 2\sqrt{mk}$



10 エネルギー保存則と位置エネルギー

10.1 力学的エネルギーの保存 (1 次元)

位置 x だけで決まる力 $F(x)$ を受けて 1 次元の運動をする, 質量 m の質点を考えよう.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F(x(t)). \tag{98}$$

あてはまる例 **バネの力.**

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t). \quad \text{すなわち} \quad F(x) = -k \cdot x. \tag{99}$$

そうでない例 **空気抵抗を受けるバネ. 力 F は, x と v の関数.**

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t) - \gamma \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{100}$$

(98) で $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおくと,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = F(x(t)). \tag{101}$$

誰かが思いついたトリック. 両辺に $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ をかける.

$$mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{102}$$

$$\int mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t = \int F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \tag{103}$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \text{ より, 左辺} = \int mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv^2 + C_1. \tag{104}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \text{ より, 右辺} = \int F(x)\mathrm{d}x. \tag{105}$$

関数 $U(x)$ を, 力 $F(x)$ から

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' \tag{106}$$

で定義する (高校で物理を勉強した人へのコメント: これは, 質点のされる 仕事).

$$\frac{1}{2}mv^2 + C_1 = -U(x) + C_2. \tag{107}$$

すなわち
$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x) = E.(\text{一定}) \tag{108}$$

第 1 項 $\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2$ を質点の 1 という.

(106) で定義される第 2 項 $U(x)$ を質点の 2 , または 3 という.

両者の和 E を, 4 という.

式 (108) は, 力 $F(x)$ のもとで 1 次元を運動する質点の力学的エネルギー E は一定で変化しないことをいっている. これを,

力学的エネルギーは $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ である, 不変である

などという.

一般に, 力 F が, ある関数 U を用いて,

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x) \tag{109}$$

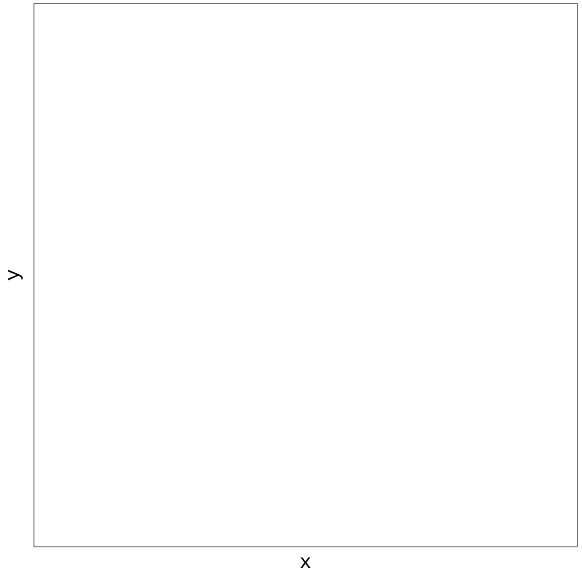
と書けるとき, 関数 $U(x)$ をポテンシャルまたは位置エネルギーという.

$$\begin{tikzcd} U(x) \arrow[r, shift left=2, "-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}"] & F(x) \arrow[l, shift left=2, "-\int \mathrm{d}x"] \end{tikzcd}$$

$U(x)$ には, 定数の不定性がある. つまり $U(x) + C$ が位置エネルギーと思ってもよい.

力 F がポテンシャルを用いて書けるとき, F は $\boxed{\text{保存的}}$ であるという.

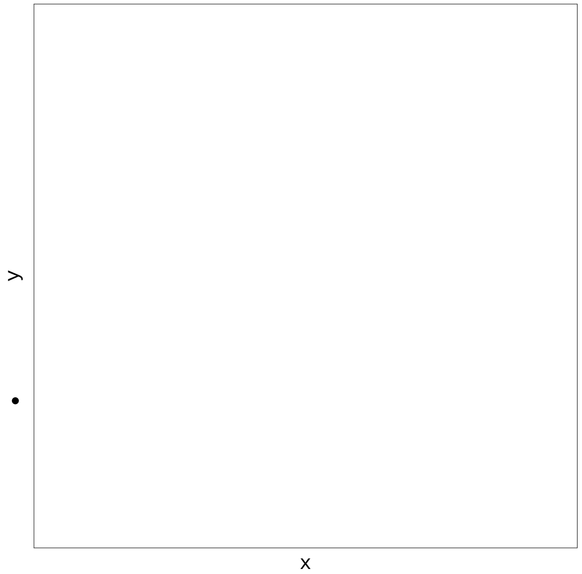
例 **重力のもとでの鉛直方向の運動.高さを** z **とかく.** $F(z) = -mg.$



$$U(z) = -\int_0^z F(z)\,\mathrm{d}z' = -\int_0^z mg\,\mathrm{d}z' = mgz.$$

保存則　$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + mgz(t) = E(\textbf{一定}).$$

例 **バネの力のもとでの運動.自然長からの変位を** x. $F(x) = -kx.$



$$U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = -\int_0^x (-kx')\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}kx^2.$$

保存則　$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}k(x(t))^2 = E(\textbf{一定}).$$

例題 5　*1.* ポテンシャルが $U(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$ であるとき, 質点が受ける力 $F(x)$ を求めよ.

2. 重力のもとで (重力加速度 g), 質量 m の質点を, 地表から速度 v_0 で鉛直上向きに打ち出した. 最高点の高さを, 力学的エネルギー保存則を用いて求めよ.

7

quiz 1

1. 1 次元を運動する質点にはたらく力が $F(x) = -x - x^3$ であるとき, ポテンシャル $U(x)$ を求めよ.

2. ばね定数 k のばねに取りつけられた, 質量 m の質点を考える. 自然長から x_0 だけ引きのばして, 静かに手を放した. 自然長に戻ったときの速さを, 力学的エネルギー保存則を用いて求めよ.

10.2 位置エネルギーを用いた運動の解析

力学的エネルギー E を持つ物体の運動は,

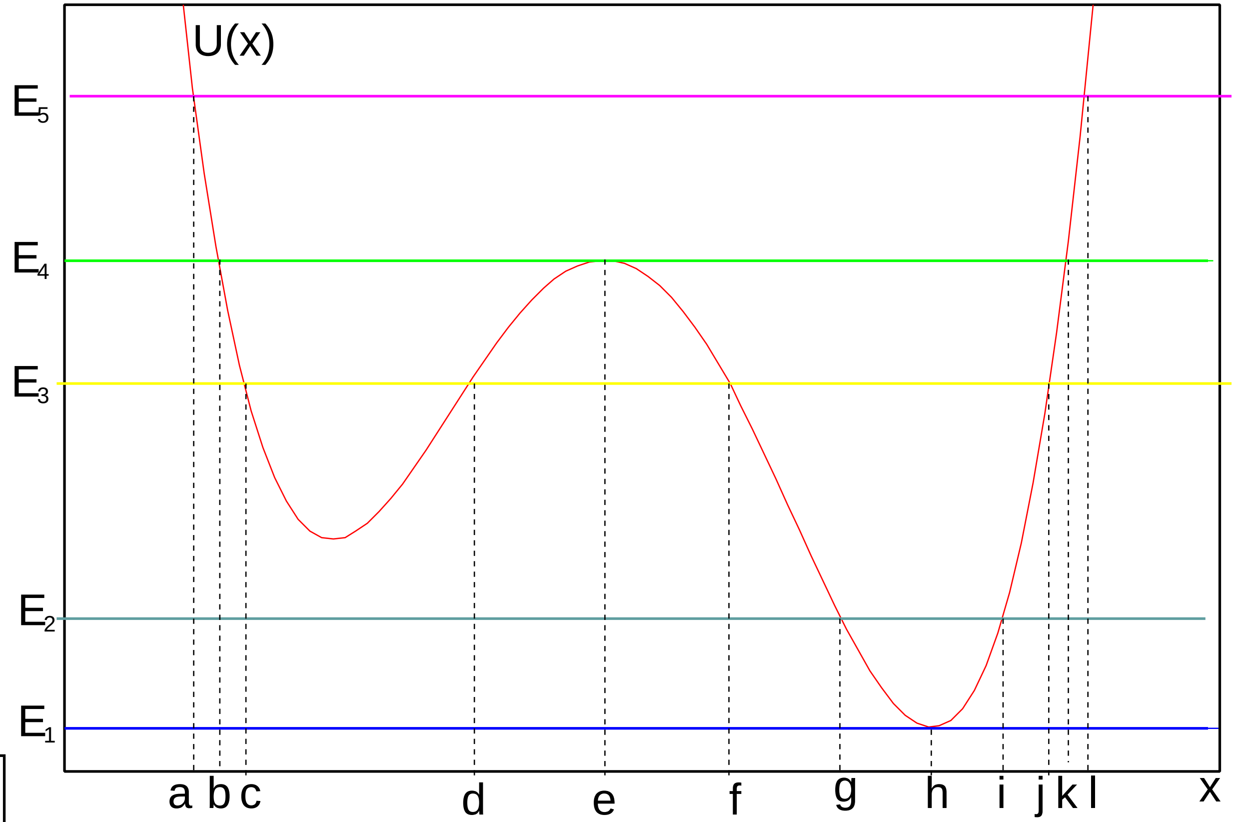
$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x) = E. \tag{110}$$

を満たす (力学的エネルギー保存則). 変形して,

$$E - U(x) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 \geq 0. \tag{111}$$

- **質点は, $E - U(x) \geq 0$ であるような x にしか移動できない.**
- **$E - U(x) = 0$ であるような x では, 速度が 0 になる.**

この性質を用いて, 質点の運動の様子を理解できる.



$\boxed{\text{例}}$

$E = E_1$ **のとき**, $x = h$ **で静止**.

$E = E_3$ **のとき**, $c \leq x \leq d$ **を往復**. **または**, $f \leq x \leq j$ **を往復**

$E = E_4$ **のとき**, $x = e$ **で静止**. **または**, $b \leq x < e$ **から** $x = e$ **に限りなく近づく**. **または**, $e < x \leq j$ **から** $x = e$ **に限りなく近づく**. $(t \to \infty)$

quiz 2 $E = E_2, E_5$ **のときの運動を説明せよ**.

10.3 興味と暇がある人のための注 1

(108) を $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ について解いた

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \tag{112}$$

を積分することによっても $x(t)$ が求められる．落下運動の場合:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - mgz)}\text{より}\ \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\frac{E}{mg} - z}} = \sqrt{2g}\mathrm{d}t \tag{113}$$

10.4 興味と暇がある人のための注 2

3 次元での力とポテンシャルとの関係

$$\vec{F}(\vec{r}) = (-\frac{\partial U}{\partial x}(\vec{r}), -\frac{\partial U}{\partial y}(\vec{r}), -\frac{\partial U}{\partial z}(\vec{r})). \tag{114}$$

2 次元以上では，保存的でない力のほうが普通．(応用ベクトル解析参照)

きょうの quiz **の略解は**, 1/22 **以降に** 1-508 **前トレイで配布します**.

期末試験範囲

基本的には, **後期の講義で扱った部分すべてです**. **講義ノートに載っていても**, **説明しなかった事項は試験範囲ではありません**. (**とばした部分を取り除いた講義ノートを**
`http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/` **に置いています**)

次の問題は出します.

- **変数分離型微分方程式** ($\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(x(t))g(t)$).
- **複素数**. **オイラーの公式**. **極表示**.
- **空気抵抗を受ける**/**受けないばねの運動と** $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + cx(t) = 0$ **タイプの微分方程式**.