物理数学 II[1] 期末試験

龍谷大学理工学部数理情報学科 2002 年 1 月 28 日 樋口さぶろお[2]

結果だけでなく, 導出の過程を記すこと.

問 1

関数 $x(t)$ に対する次の微分方程式を解け. 初期条件が与えられている場合は, それを用いて積分定数を決定せよ.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 4x(t), \quad x(0) = -1. \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -1 - 2x(t). \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 3\mathrm{e}^{-x(t)}, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 3x(t) = 0, \quad x(0) = 3, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -7. \tag{4}$$

問 2

関数

$$x(t) = i\mathrm{e}^{(-1+2i)t} - i\mathrm{e}^{(-1-2i)t} \tag{5}$$

を考える.

1. $x(t)$ を, オイラーの公式を用いて, 虚数単位 i を含まない形に書き直せ.
2. $x(t)$ の, $t > 0$ でのグラフを書け.

問 3

直線上を運動する質量 $m = 1$ の質点を考える. 位置 x にあるとき, 質点は 保存的な力 $F(x) = -x^3 + x$ を受ける.

1. 位置エネルギー $U(x)$ を求めよ.
2. 時刻 $t = 0$ には, $x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ だった. 後の時刻 T には, 質点は $x(T) = 0$ に位置していた. この時刻での速度の大きさ $\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T)\right|$ を, 力学的エネルギー保存則から求めよ.

[1] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/

[2] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

問 4

単振動の方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 9x(t) = 0 \tag{6}$$

を考える. 初期条件を $x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 3$ とする.

1. 微分方程式を解いて初期条件を課し, $x(t)$ を求めよ.

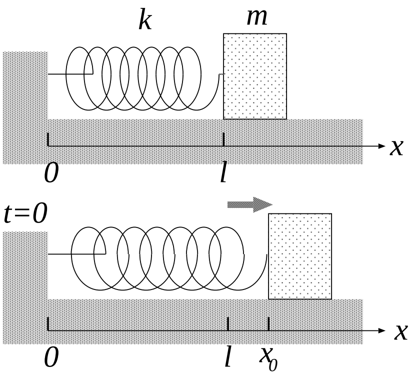
2. 振動の振幅, 周期, 振動数を求めよ.

問 5

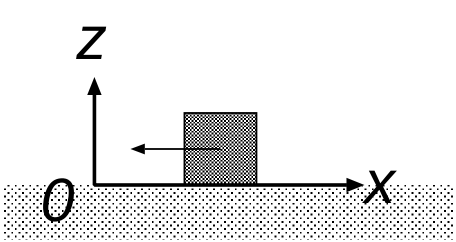
この問では, 運動方程式を解かなくてよい. 与えられた変数, 定数のみを用いて答えること.

1. 重力 (重力加速度 g) と速度に比例する空気抵抗の力 (比例定数 k) を受けて鉛直方向に運動する, 質量 m の質点を考える ($m, k, g > 0$). 鉛直上向きに z 軸をとる. $z(t)$ についての運動方程式を書け.

2. 図のように, ばね定数 k のばねの先に, 質量 m の質点がつながれている. ばねの自然長は ℓ である. 重力, 摩擦力, 空気抵抗の力は考えない. 図のように x 軸をとる. 質点を x_0 まで引っ張り, 時刻 $t = 0$ に, 静止した状態から静かに手を離した. $x(t)$ に対する運動方程式と初期条件を書け.



3. 図のように, 摩擦のある水平な面 (動摩擦係数 μ') の上を左向きにすべる質量 m の物体を考える. 空気抵抗は無視する. 重力加速度を g, 垂直抗力を N とする ($\mu', m, g > 0$). 図のように, 水平方向に x 軸, 鉛直方向に z 軸をとる. $x(t), z(t)$ についての運動方程式をかけ.



物理数学II[3]期末試験龍谷大学理工学部数理情報学科2002年1月28日樋口さぶろお[4]

略解

問1

積分定数を C とかく.

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = 4\mathrm{d}t(\text{変数分離形}) \rightsquigarrow x(t) = -\mathrm{e}^{4t}. \tag{7}$$

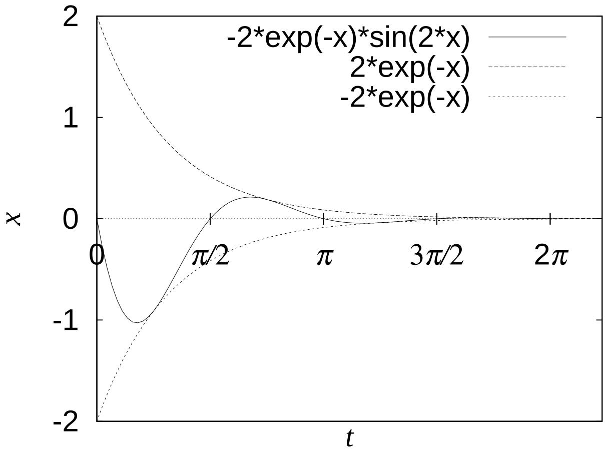
$$\frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{1}{2}} = -2\mathrm{d}t(\text{変数分離形}) \rightsquigarrow x(t) = C\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{2}. \tag{8}$$

$$\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = 3\mathrm{d}t(\text{変数分離形}) \rightsquigarrow x(t) = \log(t+C) + \log 3. \tag{9}$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \text{ とおくと}, \lambda = -1, -3 \text{ より}, \quad x(t) = \mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-3t}. \tag{10}$$

問2

$$\begin{aligned} x(t) =& i\mathrm{e}^{(-1+2i)t} - i\mathrm{e}^{(-1-2i)t} \\ =& i\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{2it} - \mathrm{e}^{-2it}) \\ =& i\mathrm{e}^{-t}(i\sin 2t - i\sin(-2t)) \\ =& -2\mathrm{e}^{-t}\sin 2t. \end{aligned} \tag{11}$$



問3

1. 定数を加える不定性があるが,

$$U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2. \tag{12}$$

2. 力学的エネルギー保存則は,

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x) = \text{一定} \tag{13}$$

時刻 $t=0$ と $t=T$ での力学的エネルギーは等しいので,

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + U(2) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T)\right)^2 + U(0). \tag{14}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T)\right| = \left(\frac{2}{m}\left(U(0)-U(2)\right)\right)^{1/2} = 2. \tag{15}$$

[3]http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/

[4]mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

問 4

1. 解は,

$$x(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t \tag{16}$$

であり, 代入すると解になっていることが確かめられる. ($x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて, $\lambda = \pm 3i$ を得てもよい). 初期条件から積分定数 C_1, C_2 を定めると,

$$\begin{aligned} x(t) =& 1 \cdot \cos 3t + 1 \cdot \sin 3t \\ =& \sqrt{2}(\cos 3t \cos \tfrac{\pi}{4} + \sin 3t \sin \tfrac{\pi}{4}) \\ =& \sqrt{2} \cos(3t - \tfrac{\pi}{4}). \end{aligned} \tag{17}$$

2. 振幅は $\sqrt{2}$, 周期は, $\frac{2\pi}{3}$, 振動数は $\frac{3}{2\pi}$.

問 5

1. 空気抵抗の力は速度と逆向きであることに注意して,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg - k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t). \tag{18}$$

2. 変位は $x - \ell$ であることに注意して, 運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k(x(t) - \ell). \tag{19}$$

初期条件は

$$x(0) = x_0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{20}$$

3. 左にすべっているので, 摩擦力は右向きすなわち正.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = + \mu' N. \tag{21}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = N - mg. \tag{22}$$

お知らせ

- 答案は返却しません.
- 得点はメイルでお知らせします.
- メイルでお伝えした情報と, 過去に受けとった答案の点数とが一致しないなど, もしも集計上の誤りと思われる点があれば遠慮なく申し出てください.