物理数学II[1]ファイナルトライアル

龍谷大学理工学部数理情報学科 2003 年 01 月 31 日樋口さぶろお[2]

注意

1. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
2. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

次の微分方程式を, 初期条件のもとで解いて, $x(t)$ を求めよう. 途中で虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ がでてきた場合は, 最終的には i を含まない形に整理しよう.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+x(t)+2=0, \quad x(0)=-3.$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+5\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+6\cdot x(t)=0, \quad x(0)=3, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-7.$

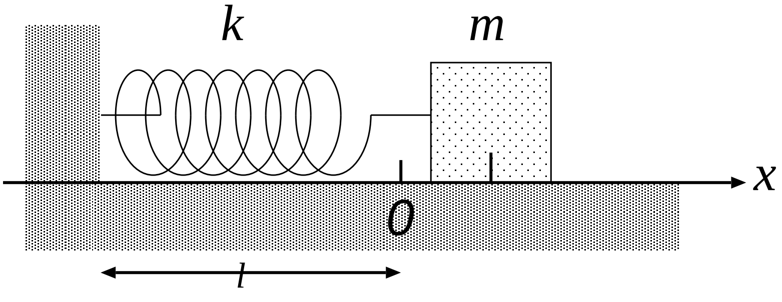
(3) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=t, \quad x(0)=1.$

2

質量 $m=1$ の質点が, 自然長 ℓ, ばね定数 $k=9$ のばねの先に取りつけられていて, 直線上を運動する. 直線上に x 軸をとり, 自然長の位置を原点 $x=0$, ばねののびる方向を x の正の向きとする. 質点にはばね以外の力は働かない.

時刻 $t=0$ に, ばねを自然長の位置から 5 だけひきのばして, 静かに手を離した.

1. 運動方程式を書こう (数値でなく, アルファベットの変数名を使おう).
2. 初期条件を書こう.
3. 運動方程式を解いて, 運動を求めよう.
4. ばねののびが最初に 0 に戻る時刻を求めよう.
5. 振動の周期と振幅を求めよう.
6. 位置エネルギーを力から求めよう.
7. ばねののびが最初に 3 になった瞬間の速度を, 力学的エネルギー保存則を利用して求めよう (保存則の証明はしなくてよい).

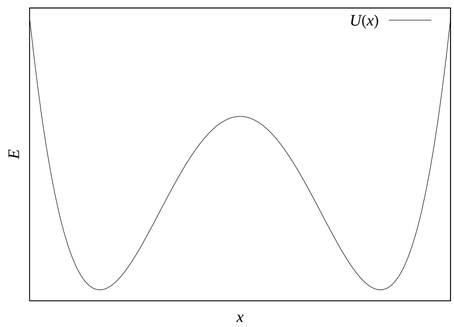


[1] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/

[2] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, へや 1-508, でんわ 077-543-7501

3

直線上を運動する $\boxed{\text{質量 } m=2}$ の質点を考える．直線上に x 座標をとる．位置エネルギーは $U(x)=x^4-8x^2$ である．関数 $U(x)$ のグラフは図のようになる．



1. 質点のうける力 $F(x)$ を求めよう．
2. 平衡点をすべて求めよう．
3. 時刻 $t=0$ には，質点の位置は $x(0)=-2$，速度は $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-2$ だった．位置エネルギー，運動エネルギー，力学的エネルギーの関係を利用して，時間 $t>0$ に質点が運動する範囲と，運動の様子を答えよう．
4. 時刻 $t=0$ に，位置 $x(0)=-2$ から出発した質点が，$t>0$ のどこかの時点で，位置 $x=\sqrt{6}$ に到達する，あるいは通過するためには，初速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)$ はどのような範囲の値でなくてはならないか，エネルギー保存則を利用して答えよう．

4

減衰振動あるいは過減衰を表わす微分方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=-k\cdot x(t)-b\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{4}$$

を考える．ただし，$m,k,b>0$ は定数で，いま，$m=1,b=6$ とする．

1. $k=25$，初期条件 $x(0)=2,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-6$ の時の運動は，減衰振動

   $$x(t)=2\mathrm{e}^{-3t}\cos(4t) \tag{5}$$

   である．この $x(t)$ のグラフと $\pm2\mathrm{e}^{-3t}$ のグラフとを，範囲 $t\geq0$ で，横軸を t，縦軸を x として，重ねて描こう．
2. $k=8$，初期条件 $x(0)=2,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-6$ の時の運動は減衰振動か，それとも過減衰 ($t\to\infty$ で，振動せずに $x(t)\to0$ となる運動) か，答えよう．
3. $k=13$，初期条件 $x(0)=0,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-4$ の時の解 $x(t)$ を求めよう．

5

複素数 $z_1=\mathrm{e}^{2+\frac{3}{4}\pi i},z_2=1-\sqrt{3}i$ を考える．ただし，i は虚数単位．

1. z_1 の実部，虚部を求めよう．
2. $|z_2|$ と $\arg z_2$ を求めよう．
3. $(z_2)^5$ の実部，虚部を求めよう．
4. $z_1\times z_2$ の絶対値と偏角を求めよう．

物理数学 II[3] ファイナルトライアル略解

龍谷大学理工学部数理情報学科 2003 年 01 月 31 日樋口さぶろお[4]

1

1. 変数分離, あるいは, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -kx(t) + (\text{定数})$ 型とみなして,

$$x(t) = -\mathrm{e}^{-t} - 2. \tag{1}$$

2. $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいてみると, $\lambda = -2, -3$ となる. 最終的に,

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t}. \tag{2}$$

3. 変数分離, または両辺をいきなり t で積分して,

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 1. \tag{3}$$

2

1.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \cdot x(t) \quad \text{または} \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -9 \cdot x(t). \tag{4}$$

2.

$$x(0) = 5, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{5}$$

3. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて λ を求めると, $\lambda = \pm 3i$ などより,

$$x(t) = 5\cos(3t), \tag{6}$$

つまり単振動.

4. $x(t) = 5\cos(3t)$ となる最小の正の t を求めて, $t = \frac{1}{6}\pi$
5. 周期 T は $3T = 2\pi$ より, $T = \frac{2}{3}\pi$. 振幅 A は, $|x(t)|$ の最大値であり, $A = 5$.
6. $U(x) = -\int_0^x -kx'\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}kx^2$.
7. 力学的エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad (\text{定数}) \tag{7}$$

$t = 0$ と, のびが 3 になった瞬間 $t = T$ について式をたてると,

$$\frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 5^2 = E. \tag{8}$$

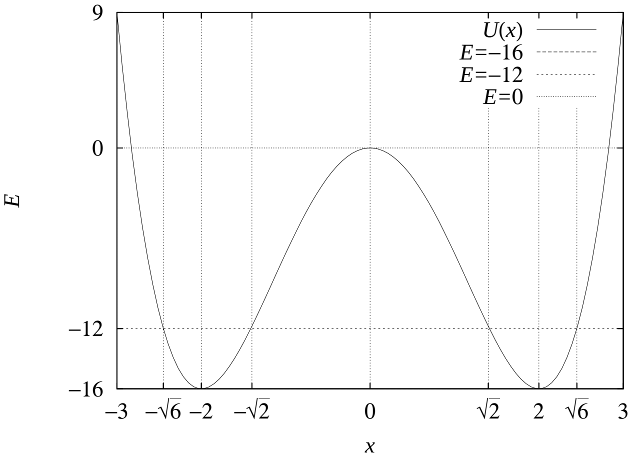
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T)\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3^2 = E. \tag{9}$$

よって,$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) = \pm 12$. 最初にのびが 3 になった瞬間には, x 軸の負の方向に向かっているので, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) = -12$

[3] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/

[4] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

3



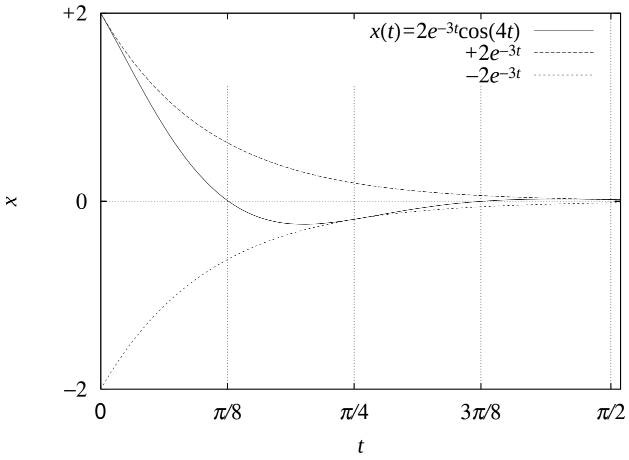
1. $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x) = -4x^3 + 16x = -4x(x+2)(x-2)$.
2. $F(x) = 0$ となる点なので, $x = 0, \pm 2$.
3. 力学的エネルギー E , 速度を $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ として,

   (10) $\quad E = \dfrac{1}{2}mv^2 + U(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-2)^2 + U(-2) = -12.$

   質点が運動できる範囲は, $\frac{1}{2}mv^2 = E - U(x) \geq 0$ を満たす必要があるので, $-\sqrt{6} \leq x \leq -\sqrt{2}$ または $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{6}$. しかし, $x = -2$ から出発するので, $x = -\sqrt{6}$ と $x = -\sqrt{2}$ の間の往復運動になる.
4. $x = \sqrt{6}$ に到達するためには, $x = 0$ を通過する必要があり, $E = 0$ より大きい力学的エネルギーを持つことが必要. よって,

   (11) $\quad \dfrac{1}{2}mv^2 + U(-2) > 0 \quad$ すなわち $\quad |v| > 4.$

4



1. $\pm 2\mathrm{e}^{-3t}$ の間を, 周期 $\pi/2$ で振動する. $t = 0$ での傾きは, $+2\mathrm{e}^{-3t}$ と同じ.
2. 特性方程式の判別式 D を計算すると, $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 > 0$ となるので過減衰.
3. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて代入すると, $\lambda = -3 \pm 2i$. 初期条件より

   (12) $\quad x(t) = -2\mathrm{e}^{-3t}\sin(2t).$

5

1.

$$(13)\quad z_1 = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi i} = \mathrm{e}^2 \cdot (\cos(\tfrac{3}{4}\pi) + i\sin(\tfrac{3}{4}\pi)) = \frac{-\sqrt{2}\mathrm{e}^2}{2} + \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^2}{2} i.$$

よって, $\mathrm{Re} z_1 = -\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^2}{2}, \mathrm{Im} z_1 = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^2}{2}$.

2.

$$(14)\qquad |z_2| = \sqrt{(+1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2.$$

$$(15)\quad \arg z_2 = -\frac{1}{3}\pi.$$

3.

$$(16)\quad (z_2)^5 = \left(2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\pi i}\right)^5 = 2^5 \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}\pi i} = 16 \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi i} = 16 + 16\sqrt{3} i.$$

よって, $\mathrm{Re}((z_2)^5) = 16, \mathrm{Im}((z_2)^5) = 16\sqrt{3}$.

4.

$$(17)\quad z_1 \cdot z_2 = \mathrm{e}^2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi i} \times 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\pi i} = 2\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{\frac{5}{12}\pi i}.$$

よって, $|z_1 \times z_2| = 2\mathrm{e}^2, \arg(z_1 \times z_2) = \frac{5}{12}\pi$.

ファイナルトライアルの点数と, 科目の最終的成績の通知は, 2003/02/14 までにメールで行います. ただし, 龍大インターネットのメールアドレスを以下のように 登録した人にのみ 行います. 個別の成績の問い合わせには応じられません. ページ

`http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/mail.html`

の手順にしたがって, `hig-mark@bird.math.ryukoku.ac.jp` にメールを送って登録してください.