

# 物理数学 II

樋口さぶろお<sup>a</sup>

- 講義の Web page

<http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/>

- この紙は, 上の Web page や 1-508 前の引き出しで事前に配っていることもあります.
- 成績は 100 点 = 平常点 10 + 秋のプチテスト 15 + 冬のプチテスト 25 + ファイナルトライアル 50. プチテストの日程は追って連絡します.
- 毎回, 理解を確かめる quiz をします. 配った紙に解いて提出してください. フォルダーを学籍番号でグループ分けしています.
- 紙は, チェックした後, 1-508 前の引き出しで返却します. ただし, 数週間以上経過したものは処分することがあります.

---

<sup>a</sup><mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp>, <http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/>,  
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

- **佐本 n.m**, **佐本 p99** などは, 参考文献 (佐川-本間 力学) の参照個所を示します.
- 教育補助員 宮野仁代さん (松木平研 M2)
- チューター 前直弘さん (飯田研 D,1-615), 郷原徳照さん (松木平研 M1,1-539) 他.
- 再履修の方へ: 2001 年度以前の内容と同じではありません (重なる部分は多いですが)

# 1 ニュートンの運動の3法則

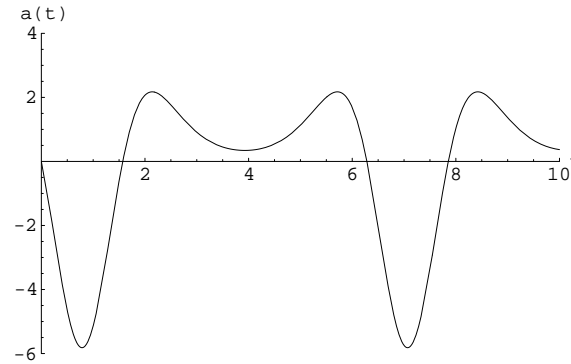
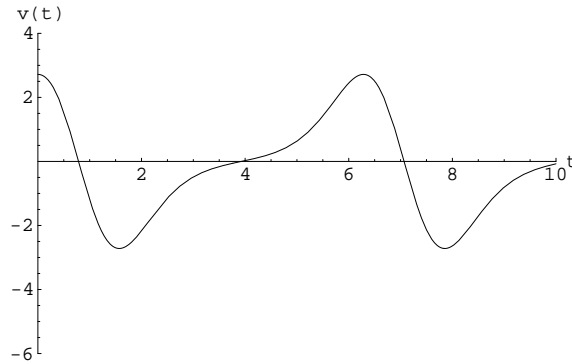
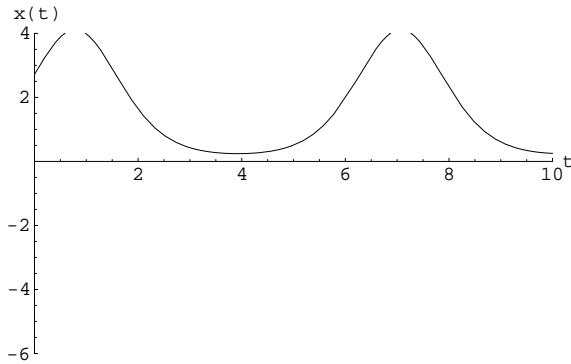
‘物体の運動の様子  $\vec{r}(t)$  は、物体に加わる力  $\vec{F}(t)$  によってきまる.’

その関係がニュートンの運動方程式.

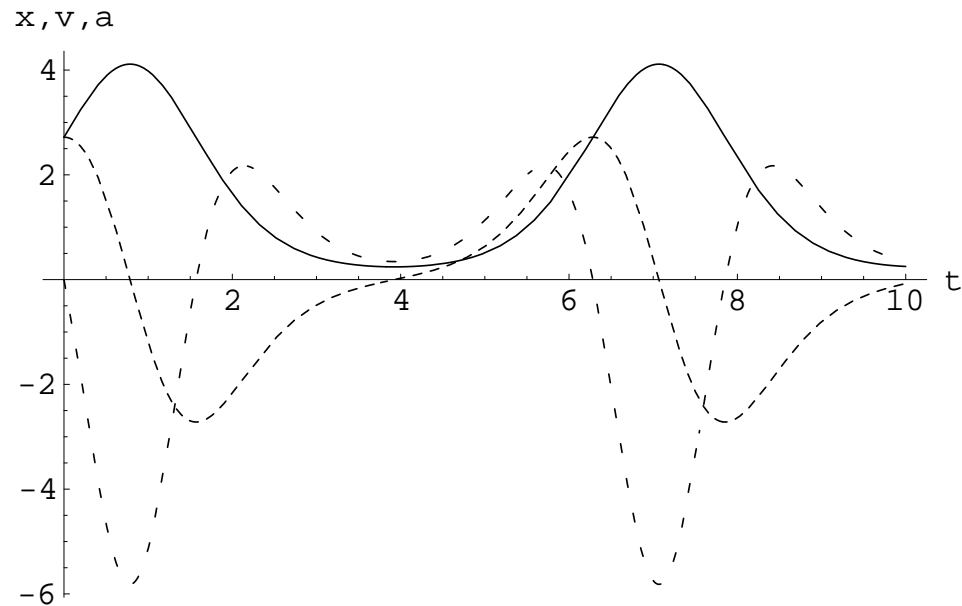
## 1.1 物理数学 I の復習

$t$ : 時刻,  $\vec{r}(t)$ : 3次元ベクトル

<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 5px;">位置 <math>\vec{r}(t)</math></div>	$\begin{array}{c} \text{微分} \\ \rightarrow \\ \text{積分} \\ \leftarrow \end{array}$	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 5px;">速度 <math>\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)</math></div>	$\begin{array}{c} \text{微分} \\ \rightarrow \\ \text{積分} \\ \leftarrow \end{array}$	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 5px;">加速度 <math>\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t)</math></div>
---	--	--	--	--



重ねてみると,



時刻:  $t \dots$  車の時計.

位置:  $x \dots$  車の .

速度:  $v_x \dots$  車の .

加速度:  $a_x \dots$  .

ない車は‘アクセルの踏み具合’(バックのときは負)

**例題 1** 時間を  $t$  とするとき, ある粒子の速度ベクトルの  $x$  成分は  $v(t) = e^{-4t}$  である. 加速度ベクトルの  $x$  成分  $a(t)$  と, 位置ベクトルの  $x$  成分  $x(t)$  とを求めよ. ただし,  $x(0) = 1$ .

## 1.2 第二法則 (ニュートンの運動方程式)

佐本 3.4

物体の加速度は, 物体の受ける力で決まる.

加速度の向き: **力  $\vec{F}$**  の向きに平行.

加速度の大きさ: **質量  $m$**  に反比例, 力  $\vec{F}$  の大きさに比例.

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F} \quad \text{すなわち} \quad \boxed{5} \quad (6)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  を  $x, y, z$  方向の単位ベクトルとして成分で書く.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}.$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = F_x(t), \quad m \frac{d^2 y}{dt^2}(t) = F_y(t), \quad m \frac{d^2 z}{dt^2}(t) = F_z(t). \quad (7)$$

力から加速度, 加速度から速度, 位置が (積分で) 計算できる.

## 質量とは

質量の単位:  $\text{kg}$  (キログラム). 質量はスカラー

水 1 リットルの質量は  $1\text{kg}$ . 1 円玉の質量は  $1\text{g}=0.001\text{ kg}$ .

(慣性) 質量: 6

重さ: 7

(慣性) 質量  $\neq$  重さ

## 力とは

力の単位  $\text{N}$ (ニュートン). 力はベクトルで重ねあわせができる.

$1\text{kg}$  の物体にはたらくと,  $1\text{m/s}^2$  の加速度を与える力の大きさを  $1\text{N}$  という.  $1\text{N}=1\text{ kg m/s}^2$ .

地表で  $1\text{kg}$  の物体にはたらく重力:  $1\text{ kg} \times 9.8\text{m/s}^2 = 9.8\text{N}=1\text{kg 重}$ .

## 1.3 第一法則 (慣性の法則)

佐本 3.2

第二法則で,  $\vec{F} = \vec{0}$  のとき,

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}(t) = \vec{0} \quad (= \vec{F}). \quad (8)$$

物体は, ‘力’ の作用を受けないかぎり, 等速直線運動をする. (特に, 速度  $\vec{0}$  すなわち静止の場合もある)

例: エアホッケーのパック, 電車の中の風船, 無重力状態の宇宙飛行士, 宇宙船.

例でないもの: 地面を転がるボール, 自転車, 自動車.



観測者は地面に固定されているとは限らない.

等速直線運動する電車, 飛行機, エレベータの中でもよい.

慣性系

8

の中では成り立たない.

当面, このような状況は考えない. ‘慣性系’のみを考える.

**例題 2** 板のうえで, ひもで結んだ重りを振り回す. ひもが切れると, 重りはどのような運動をするか.

## 1.4 第三法則 (作用・反作用の法則)

佐本 3.5

年末ごろやります.

## 2 運動方程式

しばらく、運動が  $x$  方向に限られた場合を考えよう。つまり、

$$\vec{r}(t) = (x(t), 0, 0), \quad \vec{v}(t) = (v(t), 0, 0), \quad \vec{a}(t) = (a(t), 0, 0), \quad \vec{F} = (F, 0, 0)$$

の  $x(t), v(t), a(t), F$  だけを考えよう。

### 2.1 運動方程式を‘解く’

力  $F$  が与えられたときに、運動方程式を解いて  $x(t)$  を求めるのが、力学の典型的な問題。

**例題 3** 時間を  $t$  とする. 質量  $m$  の物体が, 力  $F = e^{-t}$  を受けて運動している. 時刻  $t = 0$  で  $x = 0$  に静止していた物体の運動を求めよ.

言葉の使い方:

運動を求めよ  $\Leftrightarrow$  時刻  $t$  での位置  $x(t)$  を求めよ.

静止していた  $\Leftrightarrow$  速度が 0 だった  $\Leftrightarrow v(0) = 0$ .

10

$$x(t) = \frac{1}{m}e^{-t} + \frac{1}{m}t - \frac{1}{m}. \quad (16)$$

これで運動方程式が‘解けた’ ( $x(t)$  が求まった).

検算 (必ずやろう)

$$x(t) = \frac{1}{m}e^{-t} + \frac{1}{m}t - \frac{1}{m}. \quad x(0) = 0. \quad (17)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t) = -\frac{1}{m}e^{-t} + \frac{1}{m}. \quad v(0) = 0. \quad (18)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = +\frac{1}{m}e^{-t}. \quad (19)$$

**運動方程式** を解くために積分 (2 回!) すると, 積分定数 (2 個) が出てくる. これを決定するのに, **初期条件** (2 個. 今なら  $x(0), v(0)$ ) を使う.

## 2.2 きょうの quiz

1. 物理数学 I, 物理学序論の感想, 物理数学 II への希望, きょうの授業に対する感想 (早すぎた, 遅すぎた, まだ習っていないことを習っているかのように扱っている, 他の授業と記号が違う, プロジェクター/黒板が見にくい, など) を何でも書いてください.
2. 時間を  $t$  とする. 質量  $m = 1$  の物体が, 力  $F = -\cos t$  を受けて運動している. 時刻  $t = 0$  で  $x = 1$  に静止していた物体の運動を求めよ.
3. 時間を  $t$  とするとき, ある粒子の速度ベクトルの  $x$  成分は  $v(t) = -\sin(4t)$  である. 加速度ベクトルの  $x$  成分  $a(t)$  と, 位置ベクトルの  $x$  成分  $x(t)$  とを求めよ. ただし,  $x(0) = 1$ .