5.4 前回の quiz の略解

1. 部分分数展開を用いて,

$$x(t) = \frac{2 + C\mathrm{e}^t}{1 - C\mathrm{e}^t}. \tag{102}$$

2. (a) $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -v(t) - v(t)^2. \tag{103}$$

または

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2. \tag{104}$$

(b) $v(0) = 1$. ($\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0) =?$ は初期条件でない)

(c) $v(t) = \frac{1}{C\mathrm{e}^t - 1}$ などより $v(1) = \frac{1}{2\mathrm{e} - 1}$.

3.

$$x(t) = -\frac{1}{2} + C\mathrm{e}^{-4t}. \tag{105}$$

6 3次元の運動

6.1 空気抵抗がない場合の放物運動

佐本 2.2,2.4

鉛直方向に z 軸, 水平面内に x, y 軸をとる. 地表の高さを $z = 0$ とする.

地表近くの, 質量 m の物体には,

大きさ mg, 鉛直下向きの 重力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -mg)$ が働く.

$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$: 重力加速度.

$$\rightsquigarrow \begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = v_{x0}t + x_0, \\ y(t) = v_{y0}t + y_0, \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t + z_0. \end{cases} \tag{106}$$

積分定数 $v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0, z_0$. 2 階 $\times$ 3 次元 $= 6$ 個.

簡単のために, $x_0 = y_0 = z_0 = 0, v_{y0} = 0$.

$$y(t) = 0, \tag{107}$$

$$x(t) = v_{x0} t, \tag{108}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{z0} t. \tag{109}$$

(x, z) 空間での運動の軌跡を求めよう

(108),(109) から t を消去しよう. (108) から $t = x(t)/v_{x0}$ なので,

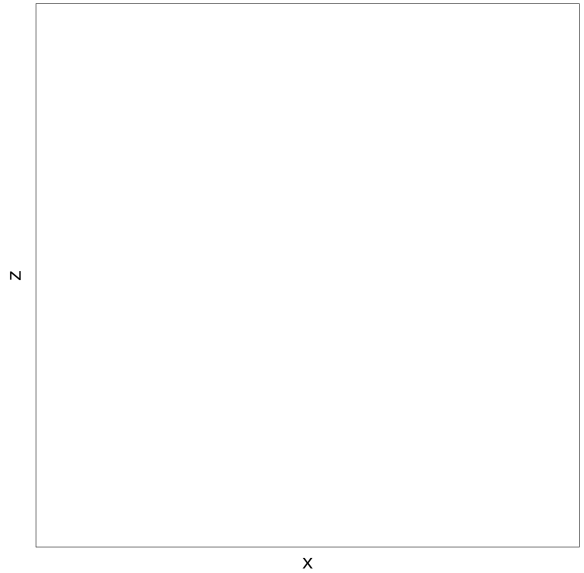
$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{x0}}\right)^2 + v_{z0}\left(\frac{x}{v_{x0}}\right) \tag{110}$$

$$= -\frac{g}{2v_{x0}^2}\left[x^2 - 2\frac{v_{x0}v_{z0}}{g}x\right] \tag{111}$$

平方完成 $\rightsquigarrow$
$$= -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x0}^2}\left[\left(x - \frac{v_{x0}v_{z0}}{g}\right)^2 - \left(\frac{v_{x0}v_{z0}}{g}\right)^2\right] \tag{112}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x0}^2}(x - x_{\mathrm{m}})^2 + z_{\mathrm{m}} \tag{113}$$

平方完成 $\Leftrightarrow x^2 - 2Ax = (x - A)^2 - A^2$ (114)



放物線!

最高点 $(x_{\rm m}, z_{\rm m}) =$ 37 .

落下点 $(2x_{\rm m}, 0)$.

例題 8 **時刻** $t = 0$ **に，初速度の大きさ** v_0**，鉛直上向きから測って角度** ϕ **の方向に発射するとき，上の積分定数** v_{x0}, v_{z0} **を求めよ．**

38

6.2 空気抵抗がある場合の放物運動

質量 m の物体を考える. 鉛直上向きに z 軸, 水平方向に x 軸をとる.

z 軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_z$ とかくと, 位置 $\vec{r}(t) = (x(t), z(t))$ に対する運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\vec{e}_z - k\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t). \tag{115}$$

成分で書いて,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{39 \quad\quad\quad}, \tag{116}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{40 \quad\quad\quad\quad\quad} \tag{117}$$

まず, $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$, $v_z(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ に対する 1 階の微分方程式と考え,

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(t) = -kv_x(t), \tag{118}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}(t) = -mg - kv_z(t) \tag{119}$$

を別々に変数分離型微分方程式として解く.

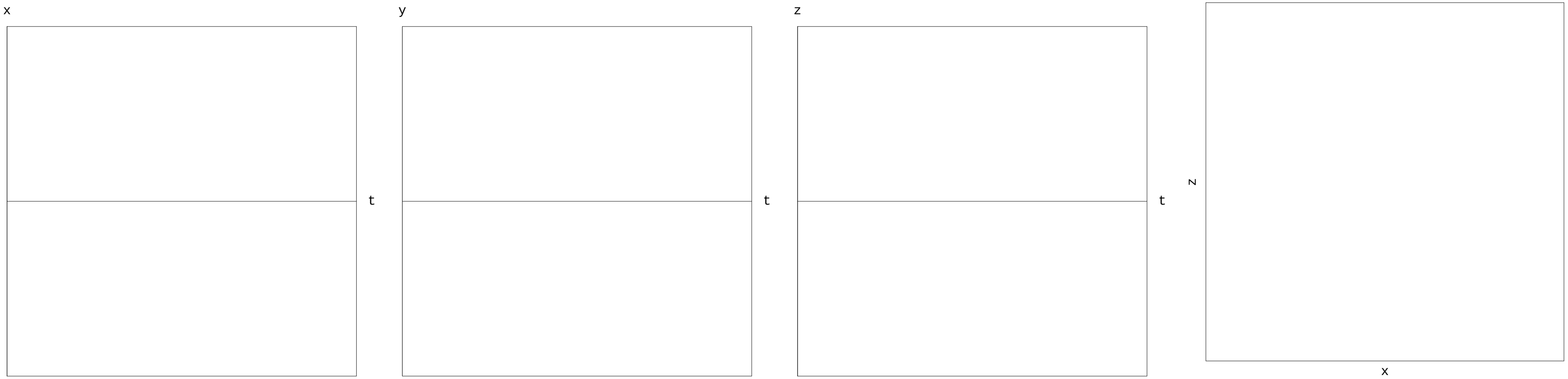
$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{120}$$

$$v_z(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{mg}{k} + C'\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{121}$$

$x(t), z(t)$ について解くと,

$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}, \tag{122}$$

$$z(t) = C_3 - \frac{mg}{k}t + C_4\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{123}$$



	$\boxed{\text{終端速度}}$ $v_{+\infty}$($t \to +\infty$ での速度)	x 方向の到達距離
空気抵抗あり	$\boxed{41}$	$< C_1$
空気抵抗なし	$\boxed{42}$	$2x_{\mathrm{m}}$

終端速度の簡単な求め方

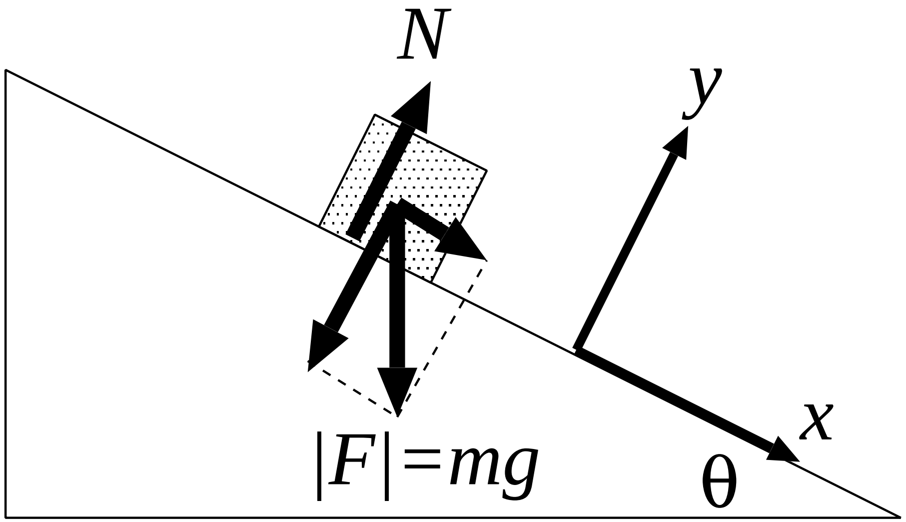
$\vec{F}$ が $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ だけの関数であるとき, $\vec{F}(v_{+\infty}) = \vec{0}$ を v について解けばよい.

例: $\boxed{43}$

7 斜面に沿う運動

佐本 4.1

水平から θ だ
け傾いたなめらかな斜面をす
べる物体 (質量 m) を考える.



運動方程式 (はたらく力は,
$\vec{F}$: 重力, $\vec{N}$: 垂直抗力.)

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} + \vec{N}. \qquad (124)$$

44 なので, 成分で書くと,

$$x \text{ 方向} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = +mg\sin\theta, \qquad (125)$$

$$y \text{ 方向} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\cos\theta + N. \qquad (126)$$

例題 9 上の状況で, 時刻 $t=0$ に, $x=x_0$ から, 上向きに速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=v_{x0}<0$ で打ち出したときの運動を, 運動方程式を解いて求めよう.

45

運動方程式を解くと, x_0, v_{x0} は積分定数として,

$$x(t) = \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2 + v_{x0}t + x_0, \tag{127}$$

$$y(t) = 0. \tag{128}$$

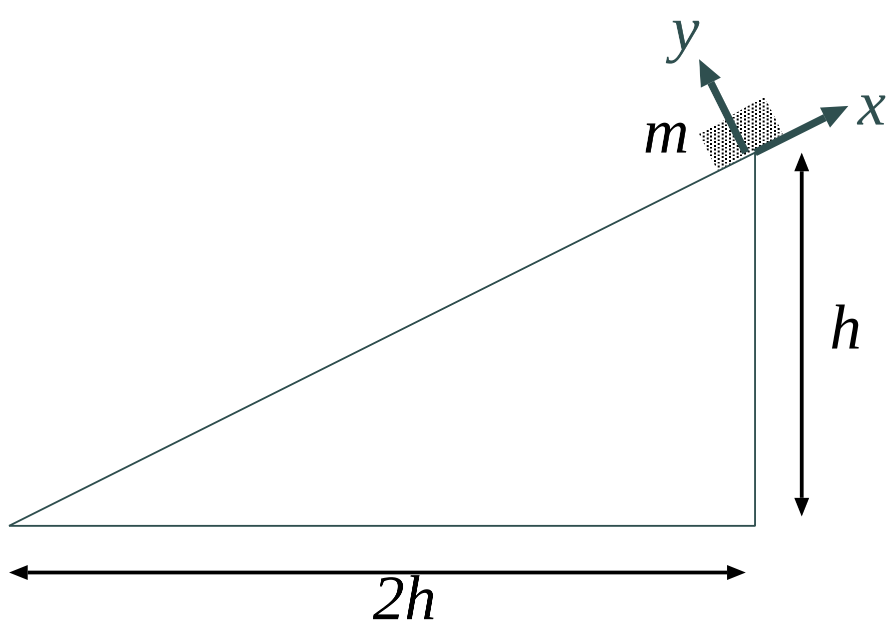
きょうの quiz

1. **図のようななめらかな斜面の上を**, **重力を受けて運動する**, **質量** m **の物体の運動を考える**. **時刻** $t=0$ **では**, **物体は**, **斜面の上端** $x=0$ **に静止している**.

   (a) **垂直抗力の大きさを** N **として**, x, y **方向の運動方程式を書こう**.

   (b) **垂直効力の大きさ** N **を求めよう**.

   (c) **運動方程式を解いて**, **斜面の下端に達する時刻を求めよう**.



2. 質量 m の物体の鉛直方向 1 次元の運動を考える．時刻 t の位置を，上向きを正にはかり，$z(t)$ とする．下向きの重力 mg と，速度の 3 乗に比例する空気抵抗 $F = -\beta(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t))^3$ $(\beta > 0)$ がはたらいているとする．

(a) 運動方程式を書こう．

(b) 終端速度 v_∞ を求めよう．