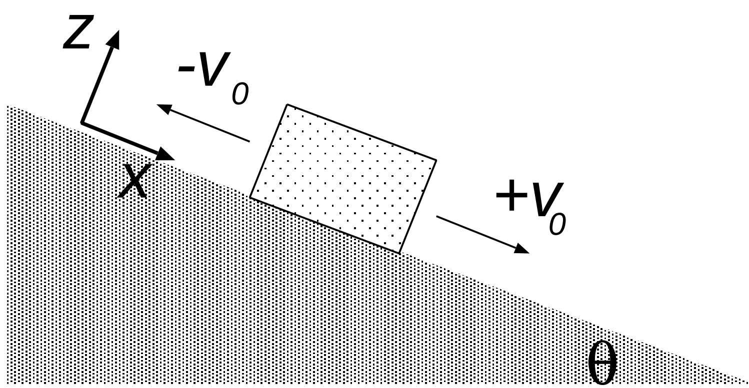
先週の quiz の解答

垂直抗力の大きさを N として, 運動方程式は



$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = +mg\sin\theta + \mu' N \qquad (142)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\cos\theta + N \qquad (143)$$

初期条件は, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -v_0$.

斜面から離れない条件 $z=0$ と (143) から, $N = mg\cos\theta$. (142) に代入して解くと,

$$x(t) = \frac{1}{2}g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)t^2 + C_1\cdot t + C_2. \qquad (144)$$

初期条件より, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = C_1 = -v_0$.

静止する時刻 $t = T$ は $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) = 0$ から

$$T = \frac{v_0}{g(\sin\theta + \mu' \cos\theta)}. \tag{145}$$

と求まる. 時刻 $t = 0$ から $t = T$ までに x 方向に進んだ距離は,

$$|x(T) - x(0)| = \left| -\frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu' \cos\theta)} \right|. \tag{146}$$

登った高さは, $\cot\theta = 1/\tan\theta$ を用いて,

$$|x(T) - x(0)| \sin\theta = \frac{v_0^2}{2g(1 + \mu' \cot\theta)}. \tag{147}$$

先週の quiz の解答 質量 M の重りをのせてぎりぎり動き出す場合を考えると,

$$0 = (m+M)\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F - \mu N, \tag{148}$$

$$0 = (m+M)\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = N - (m+M)g \tag{149}$$

よって, $F = \mu(m+M)g$ すなわち, $M = \frac{F}{\mu g} - m$ 以上である必要がある. 問題文の前半は, $\frac{F}{\mu g} - m > 0$ を保証している.

アンケートへの記入の一部とその返事

- きょうのやり方はよかった.
- きょうのやり方はよくなかった.
- もっとゆっくり進んでほしい
- もっと問題をたくさん解いてほしい.
- .... してほしい.
- 空欄を埋めたプリントを web に置いてほしい.
- プチテストの答案のどこが間違っていたかわからない.
- 年令と出身は.

個別にお返事できませんが, すべて読ませてもらいました. ありがとうございます.

9 単振動 (調和振動) と減衰振動

quiz パチンコで, 玉の速さを 2 倍にするには, ひきがねは何倍ひけばよいか. パチンコで, 玉の届く高さを 2 倍にするには, ひきがねは何倍ひけばよいか. 空気抵抗がある場合はどうか.

9.1 ばねの運動

佐本 4.4

バネの先についた物体 (質量 m) の運動を考えよう.

自然長: 力が加わっていないときのバネの長さ

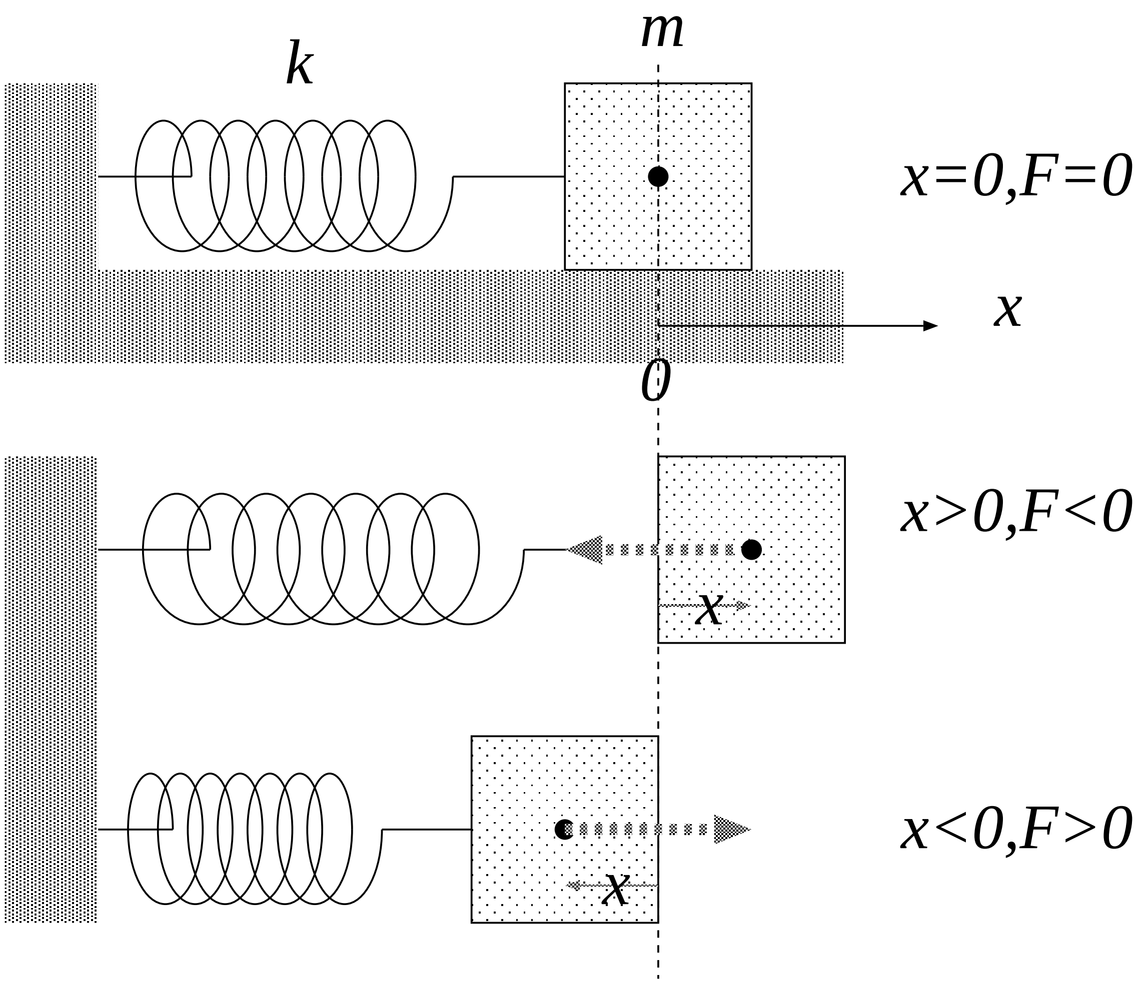
変位: $x(t) =$ (変化後のバネの長さ) $-$ (自然長)

$$\text{バネの復元力} \qquad F = -k \times x(t) \quad \text{(フックの法則)} \tag{150}$$

$k > 0$: バネ定数. バネの強さを表す.

大きさは変位に比例. 変位を小さくするようにはたらく $\rightsquigarrow -kx(t)$

変位を小さくするようにはたらく (**だからマイナス**).



運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t). \tag{151}$$

すなわち

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega^2 x(t) = 0. \qquad (\omega = \sqrt{k/m}) \tag{152}$$

これの解を教えちゃおう. C_1, C_2 **は積分定数として**,

$$\boxed{\text{公式}}\ \boxed{56 \qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{153}$$

はこの微分方程式の解. **なぜなら**

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) =& \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)) \\ =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-C_1\omega\sin(\omega t) + C_2\omega\cos(\omega t)) \\ =& (-C_1\omega^2\cos(\omega t) - C_2\omega^2\sin(\omega t)) \\ =& -\omega^2(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)) = -\omega^2 x(t).\end{aligned} \tag{154}$$

実は, **これ以外の解はない** (**来年**, **数理モデル基礎** I **で学びます**).

このような運動を $\boxed{\text{単振動 (調和振動)}}$ **という.**

例題 14 次の微分方程式を解き, 初期条件 $x(0)=1,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=0$ **から積分定数を決めよう.**

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+x(t)=0 \tag{155}$$

57

9.2 空気抵抗のもとでのばねの運動

速度に比例する空気抵抗 $-c \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **もある場合を考えよう**.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{158}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{159}$$

このときの運動を **減衰振動** **という**.

一般に,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + a \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + b \cdot x(t) = 0. \quad (a,b \text{ は定数}) \tag{160}$$

というタイプの微分方程式を考えよう.

例題 15

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 3 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 2 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{161}$$

58

実は, **任意の** C_1, C_2 **に対して**,

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{-2t} \tag{165}$$

も解になっている. **なぜなら**,

$$\begin{aligned}
\text{左辺} =& \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(C_1 x_1 + C_2 x_2) + 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C_1 x_1 + C_2 x_2) + 2(C_1 x_1 + C_2 x_2) \\
=& C_1 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + 2x_1\right) + C_2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + 2x_2\right) \\
=& C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

実は C_1, C_2 **は積分定数**. **初期条件と** $x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{-2t}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -C_1 \mathrm{e}^{-t} - 2C_2 \mathrm{e}^{-2t}$ **から** $C_1 = 2$, $C_2 = -1$ **となり**,

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \tag{166}$$

$\boxed{\text{quiz}}$ **配った紙にやってね**.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) - 3 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 4 \tag{167}$$

9.3 だめな例

'$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$' とおいてみる, は超便利. これまで出てきた他の場合にも使っちゃおう.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t) - 1 \tag{168}$$

に $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ を代入してみる.

$$\begin{aligned} \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} &= 2\mathrm{e}^{\lambda t} - 1. \\ (\lambda - 2)\mathrm{e}^{\lambda t} &= -1. \end{aligned}$$

任意の t について成立するためには, $\lambda = 2$ ととればいいというわけにはいかない. λ が 定数にならない. t に依存してしまう. おかしい.

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{解は } x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \text{ とは書けない.}}$

別の解を推測するか, 別の方法で解くかしよう. この場合には, 前に習った通りに変数分離法で解けばよい.

9.4 虚数の指数関数

'$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$' とおく, は超便利. 単振動にも使っちゃおう.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + x(t) = 0, \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0 \tag{169}$$

は, $a = 0, b = 1$ の場合. やってみよう.

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいてみる.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t}$$

よって　$\displaystyle \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + x(t) = (\lambda^2 + 1)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0.$

$\lambda^2 + 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda = \pm i$　(?????)

虚数単位　$i = \sqrt{-1}$ は $i^2 = -1$ を満たす. 複素数 $x + iy$ の i.

知らん顔して計算すると,

$$x(t) = D_1 \mathrm{e}^{it} + D_2 \mathrm{e}^{-it}. \tag{170}$$

は解. **初期条件より**,

$$x(0) = D_1 \mathrm{e}^{i0} + D_2 \mathrm{e}^{-i0} = D_1 + D_2 = 1. \tag{171}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = iD_1 \mathrm{e}^{it} - iD_2 \mathrm{e}^{-it}$$ **だから**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = iD_1 \mathrm{e}^{i0} - iD_2 \mathrm{e}^{-i0} = iD_1 - iD_2 = 0. \tag{172}$$

ここで $\mathrm{e}^0 = 1$ **を使った**.

解いて, $D_1 = D_2 = \frac{1}{2}$.

この解は $x(t) = \cos t$ だったはず.

$$x(t) = \cos t \overset{?}{=} \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{it} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-it}. \tag{173}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\sin t \overset{?}{=} \tfrac{i}{2}\mathrm{e}^{it} - \tfrac{i}{2}\mathrm{e}^{-it}. \tag{174}$$

したがって,

$$(\text{上}) + \frac{1}{i}\cdot(\text{下}) = \cos t + i\sin t \overset{?}{=} \mathrm{e}^{it}. \tag{175}$$

9.5 オイラーの公式

気分のために t を θ とかく.

定義. 実数 θ に対して

$$\boxed{\quad 59 \quad} \cdots \boxed{\text{オイラーの公式}} \tag{176}$$

定義. 複素数 $z = a + i\theta$ (a と θ は実数) に対して,

$$\boxed{\quad 60 \quad} \tag{177}$$

3 年で関数論を学ぶと, これで 'よい' というのが心から納得できます.

性質. **複素数** $z = x + iy, w = u + iv$ **に対して**,

$$\boxed{e^{z+w} = e^z \times e^w}$$

証明.

$$\begin{aligned}
e^{z+w} &= e^{x+iy+u+iv} \\
&= e^{(x+u)+i(y+v)} \\
&= e^{x+u} e^{i(y+v)} \\
&= e^{x+u}(\cos(y+v) + i\sin(y+v)) \\
&= \cdots (\textbf{加法定理}) \cdots = e^x e^u e^{iy} e^{iv} \\
&= e^z \times e^w
\end{aligned} \tag{178}$$

例題 16 微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) = 0. \qquad x(0) = 4, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{179}$$

を, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ **は一般には複素数**) **とおくことによって解こう**.

61

62

quiz **微分方程式**

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 16x(t) = 0, \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -4. \tag{184}$$

を, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ **は一般には複素数**) **とおくことによって解こう**.

冬のプチテストのお知らせ

日時 12 月 20 日 (金) 14:15–15:00 (13:30–14:15 は講義です)

場所 1-107 講義室. 講義の最初から座席指定します.

成績 この試験の成績は, 科目の成績 100 点のうち 25 点を占めます.

試験範囲 12 月 13 日 (金) の講義まで. 摩擦力のもとでの運動. 斜面に沿う運動. 単振動. $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + a \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + b \cdot x(t) = 0$ 型微分方程式. 変数分離型微分方程式.

成績の通知 冬のプチテストでもメールでの成績通知を行います. 秋のプチテストの成績も併記しますので, 登録がまだの人は登録しておきましょう.

補講のお知らせ

日時 12 月 27 日 (金) 2 講時 (いつもと違います)

場所 1-107 講義室.