前回 (2002/12/13) の quiz の略解

$z_1 = 1 + \sqrt{3}i,\ z_2 = \mathrm{e}^{2+\frac{\pi}{6}i}$ に対して,

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2. \tag{227}$$

$$\arg z_1 = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}. \tag{228}$$

$$z_2 = \mathrm{e}^2 \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i} = \mathrm{e}^2 (\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}\mathrm{e}^2}{2} + i\cdot\frac{\mathrm{e}^2}{2}. \tag{229}$$

前回 (2002/12/13) の quiz の略解

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 10\cdot x(t) = 0. \tag{230}$$

$$x(0) = 2,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -8. \tag{231}$$

(230) の解をみつけるため, $x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ を代入してみる.

$$(\lambda^2+2\lambda+10)\mathrm{e}^{\lambda t}=0. \tag{232}$$

$\mathrm{e}^{\lambda t}$ より, $\lambda^2+2\lambda+10=0$ であり, $\lambda=-1\pm\sqrt{1^2-10}=-1\pm 3i$. よって, (230) の解は, C_1, C_2 を任意の定数として,

$$x(t)=C_1\mathrm{e}^{(-1+3i)t}+C_2\mathrm{e}^{(-1-3i)t}. \tag{233}$$

次に初期条件 (231) を考える. (233) を代入して,

$$x(0)=2=C_1+C_2. \tag{234}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-8=(-1+3i)C_1+(-1-3i)C_2. \tag{235}$$

この連立方程式を解いて, $C_1=1+i, C_2=1-i$. これを (233) に代入し,

$$\begin{aligned} x(t)=&\mathrm{e}^{-t}[(1+i)(\cos 3t+i\sin 3t)+(1-i)(\cos(-3t)+i\sin(-3t))] \\ =&\cdots=2\mathrm{e}^{-t}(\cos 3t-\sin 3t). \end{aligned}$$

冬のプチテスト略解の訂正

ごめんなさい…

なお, 略解は 1-508 前引き出しで配布しています.

2(3)

$$
\begin{aligned}
(z_2)^{-10} &= \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\pi i}\right)^{-10} = \frac{1}{2^5}\mathrm{e}^{\frac{10}{4}\pi i} \\
&= \frac{1}{32}\cdot\mathrm{e}^{+2\pi i}\cdot\mathrm{e}^{\frac{2}{4}\pi i} = \frac{i}{32}.
\end{aligned}
\tag{236}
$$

3(2) **移動した距離は,**

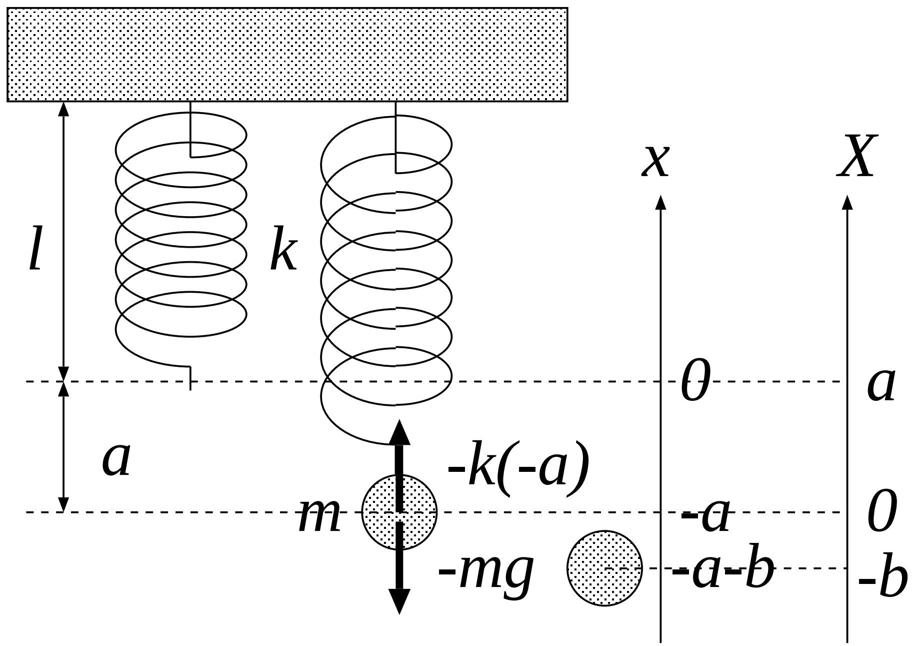
$$
|x(T) - x(0)| = \frac{V^2}{2g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)}. \tag{237}
$$

11 単振動の応用

自然長 l, ばね定数 k, 質量の無視できるばねを重力 (重力加速度 g) のもとで天井から鉛直方向につるす.

質量 $= 0$ なので, ばねの下端は, 天井から自然長だけ離れる. 下端を原点として, 上向きを正に x 座標をとる.

ここで, 質量 m の物体をばねに取りつける.



物体の運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - mg. \tag{238}$$

ばねがのびて物体が静止したときの位置は?

ばねが a **だけのびたととすると, 物体の位置は** $x = -a$. **このときに, 静止している, つまり加速度が** 0 **だから,**

69

(239)

さらに b **だけ引っ張って静かに離したときの運動は?**

$$\textbf{運動方程式}\quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - mg. \tag{240}$$

$$\textbf{初期条件}\quad x(0) = -a - b,\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{241}$$

単振動だから, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいて** (240) **の解を探してみよう** (?)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}x(t) + g = 0. \tag{242}$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right)\mathrm{e}^{\lambda t} + g = 0. \tag{243}$$

$\boxed{\lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i \text{ ではない!}}$

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **という形の解はない**.

うまい方法

x 座標の原点を, $x=-a$ に変更したものを考える. この座標を X とかくことにしよう: $x=X-a$.

時刻 t での物体の位置を $X(t)$ と書くと,

$$\text{運動方程式}\quad m\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t)=-k(X(t)-a)-mg. \tag{244}$$

$$\text{初期条件}\quad X(0)-a=-a-b,\quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(0)=0. \tag{245}$$

すなわち,

$$m\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t)=-k\left(X(t)-\frac{mg}{k}\right)-mg. \tag{246}$$

$$\text{整理して}\quad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{k}{m}X(t)=0. \tag{247}$$

$$X(0)=-b,\quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(0)=0. \tag{248}$$

この $X(t)$ **について** $X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいてみると**,

$$\left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \qquad \text{よって} \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{249}$$

よって,

$$X(t) = C_1 \mathrm{e}^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 \mathrm{e}^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \tag{250}$$

は解. 初期条件より, $C_1 = C_2 = -b/2$. **よって**,

$$X(t) = -\frac{b}{2}\left(\mathrm{e}^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \mathrm{e}^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right) = -b \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{251}$$

きょうの教訓: うまい座標系 (原点) をとるとうまくいく

もう少し堅実な人のための方法

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}x(t) + g = 0 \tag{252}$$

元凶は左辺の g. **これを**, $x(t)$ **に取り込んで**,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right) = 0 \tag{253}$$

として, $\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right)$ **をかたまりだと思おう**.

第 1 **項** $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ **は**, **このかたまりでかけてない**. **しかし**, **運良く**

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) \tag{254}$$

なので,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right) + \frac{k}{m}\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right) = 0 \tag{255}$$

とかける．そこで，

$$x(t) + \frac{mg}{k} = \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{256}$$

という解を探せばよい．あるいは

$$X(t) = x(t) + \frac{mg}{k} = x(t) + a \tag{257}$$

のように新しい変数を用いて

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m} X(t) = 0 \tag{258}$$

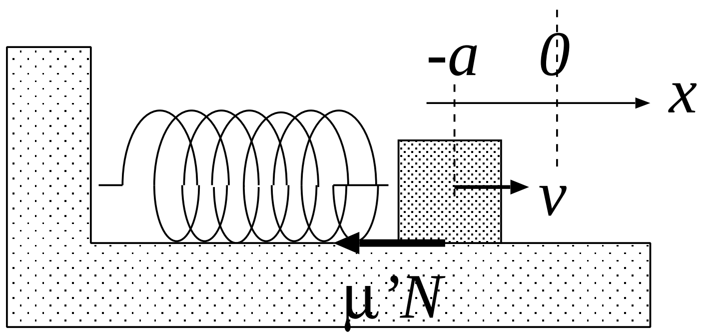
を解けばよい．

例題 20 質量 m の物体が，ばね定数 k のばねにつながれて，水平面上に置かれている．重力加速度を g とする．

面と物体の間の動摩擦係数を μ' とする．面と物体の間の静止摩擦力は考えない．

ばねを自然長から $a(> 0)$ だけ押し縮めて静かに手を離した．自然長の位置を原点，右向きに正に x 軸をとる．

ばねがのびて物体がいったん静止するまでの運動を求めよう．



70

quiz 次の微分方程式を解こう．積分定数は決定しなくてよい．

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) + 8 = 0 \tag{259}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 4x(t) + 8 = 0 \tag{260}$$

12 減衰振動と過減衰

12.1 ばねと空気抵抗の復習

ばね定数 k **のばねの力** $-kx(t)$ **と, 速度に比例する空気抵抗** $-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **とがある場合を考えよう** $(k, \gamma > 0)$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\cdot x(t) - \gamma\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{261}$$

$$\Longleftrightarrow m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \gamma\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + k\cdot x(t) = 0. \tag{262}$$

一般に,

$$a\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + c\cdot x(t) = 0. \quad (a, b \text{ は定数}) \tag{263}$$

というタイプの微分方程式を解くには, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいて** λ **をきめるのだった.**

12.2 特性方程式と解の分類

$$a \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + c \cdot x(t) = 0. \quad (b,c \text{ は定数}) \tag{264}$$

という微分方程式は, a, b, c の値に応じて異なるタイプの解を持つ.

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて代入.

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{265}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{266}$$

これは λ をきめる 2 次方程式.　……71　という.

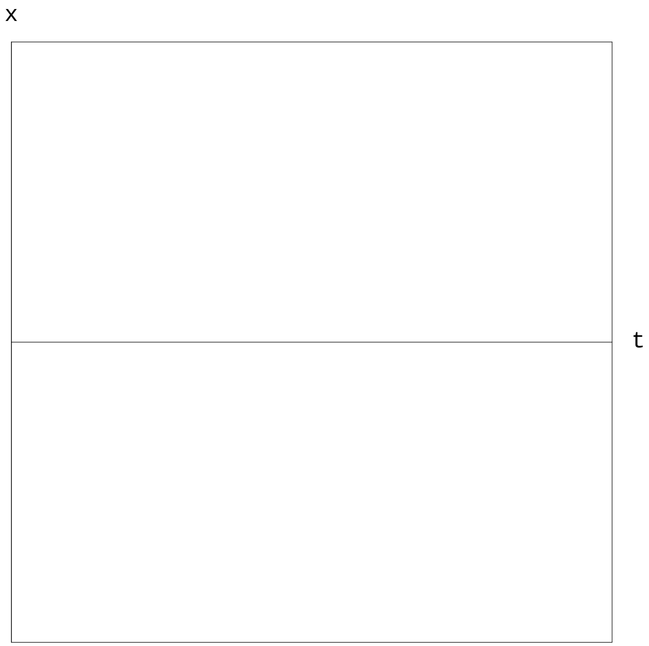
72　$D = b^2 - 4ac.$ (267)

解は, D の値によって分類される.

$D > 0$ のとき $D = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{mk} < \gamma.$ 73

2 実根. $\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - mk}}{2} = \alpha, \beta.$

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\alpha t} + C_2 \mathrm{e}^{\beta t}. \tag{268}$$

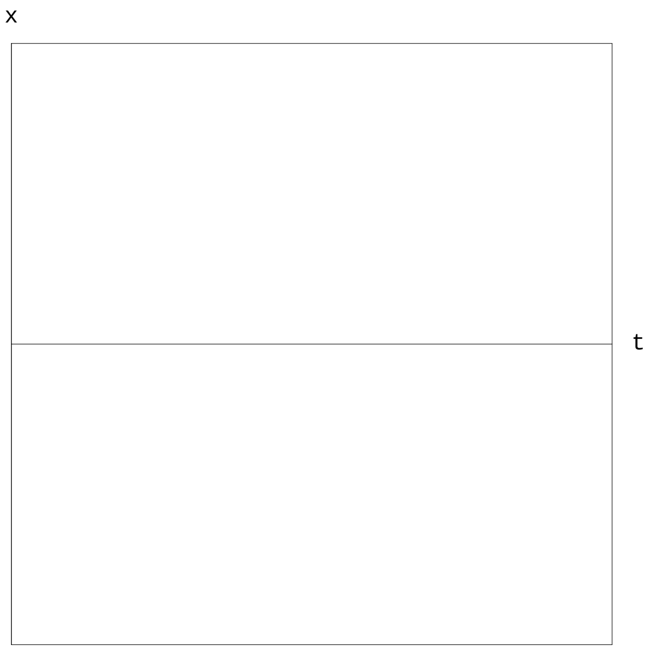


$D<0$ のとき $D = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow \gamma < 2\sqrt{mk}$

74

互いに複素共役な 2 複素根. $\lambda = \frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2} = \frac{-\gamma\pm i\sqrt{mk-\gamma^2}}{2} = \mu \pm i\omega.$

$$\begin{aligned} x(t) =& C_1 \mathrm{e}^{(\mu+i\omega)t} + C_2 \mathrm{e}^{(\mu-i\omega)t} = \mathrm{e}^{\mu t}(C_1 \mathrm{e}^{i\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-i\omega t}) \\ =& \mathrm{e}^{\mu t}((C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t) \\ =& \mathrm{e}^{\mu t}(D_1 \cos\omega t + D_2 \sin\omega t) \end{aligned} \tag{269}$$

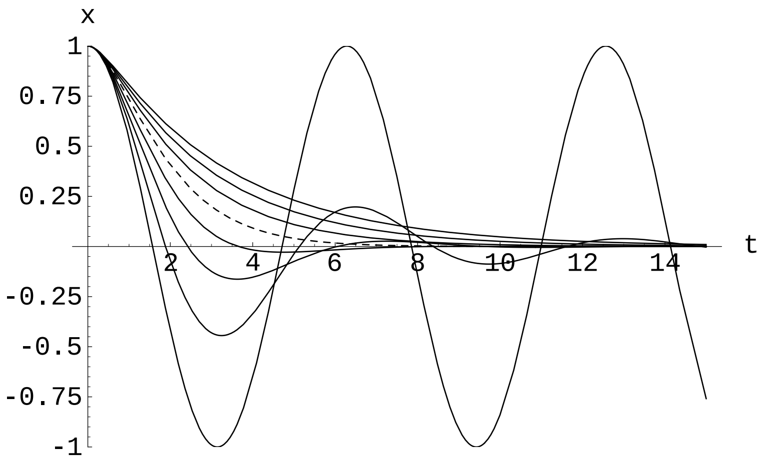


$D = 0$ のとき

重根.

過減衰と減衰振動の境い目.

来年数理モデル基礎 I でやります．臨界制動といいます.



単振動 $\Longleftrightarrow \gamma = 0 \Longleftrightarrow D = -mk < 0.$

減衰振動の中の特別な場合 (減衰しない場合)

quiz

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + c \cdot x(t) = 0, \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 2. \tag{270}$$

を考える.

1. $c = 5$ のとき, 解のグラフを描こう.
2. 過減衰となる c の範囲を求めよう.