quiz 1 の略解

1. $U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = \int_0^x (x' + x'^3)\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$.

2. 重力の位置エネルギーは $U(x) = -\int_0^x -mg\mathrm{d}x' = mgx$ なので, 速度を $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とすると, 力学的エネルギー保存則は,

$$\frac{1}{2}m(v(t))^2 + mgx(t) = E \qquad (\text{一定}). \tag{1}$$

落下し始めた瞬間には, 速さは 0 なので,

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 + mgh_0 = E. \tag{2}$$

$x = h_1$ を通過する瞬間には, 速度を v_1 とすると,

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = E. \tag{3}$$

この 2 つの式から, 速さ $|v_1|$ を m, g, h_0, h_1 で表わすと,
$|v_1| = \sqrt{2g(h_0 - h_1)}$.

quiz0 ばね定数 k のばねに取りつけられた, 質量 m の質点を考える. 自然長の位置を原点として, 時刻 t における位置を $x(t)$ とする.

$$x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = V \tag{4}$$

である場合, ばねののびの最大値を力学的エネルギー保存則を用いて求めよう.

$U(x)$ は'仕事'

質点が, 一定の力 F をうけて, x_0 から x_1 まで動いたとする. このとき,

$$\boxed{W = F \times (x_1 - x_0) = F \times \Delta x} \tag{5}$$

を, 力 F のした $\boxed{\text{仕事}}$ という.
力の向きと移動方向が同じなら $W > 0$, 逆なら $W < 0$.

力の向き	移動方向	仕事
$\rightarrow (+)$	$\rightarrow (+)$	$(+)$
$\rightarrow (+)$	$\leftarrow (-)$	$(-)$
$\leftarrow (-)$	$\rightarrow (+)$	$(-)$
$\leftarrow (+)$	$\leftarrow (-)$	$(+)$

W が大きいほど, 力 (出してる人) は仕事が多くてたいへん, という感じ.
力が x の関数 $F(x)$ である場合には

$$W = \sum_i F(x_i)\Delta x \rightsquigarrow W = \int_{x_0}^{x_1} F(x')\mathrm{d}x' \tag{6}$$

となる.

位置エネルギー

$$U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' \tag{7}$$

との関係は,

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F(x')\mathrm{d}x' = U(x_0) - U(x_1). \tag{8}$$

つまり, x_0 **から** x_1 **まで動く間に仕事を** W **だけすると**, **位置エネルギーは** W **減少する**. **逆に言うと**, x **にある質点には** $U(x)$ **だけの仕事をする能力がある**.

0.1 位置エネルギーを用いた運動の解析

力学的エネルギー E を持つ物体の運動は,

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x) = E. \tag{9}$$

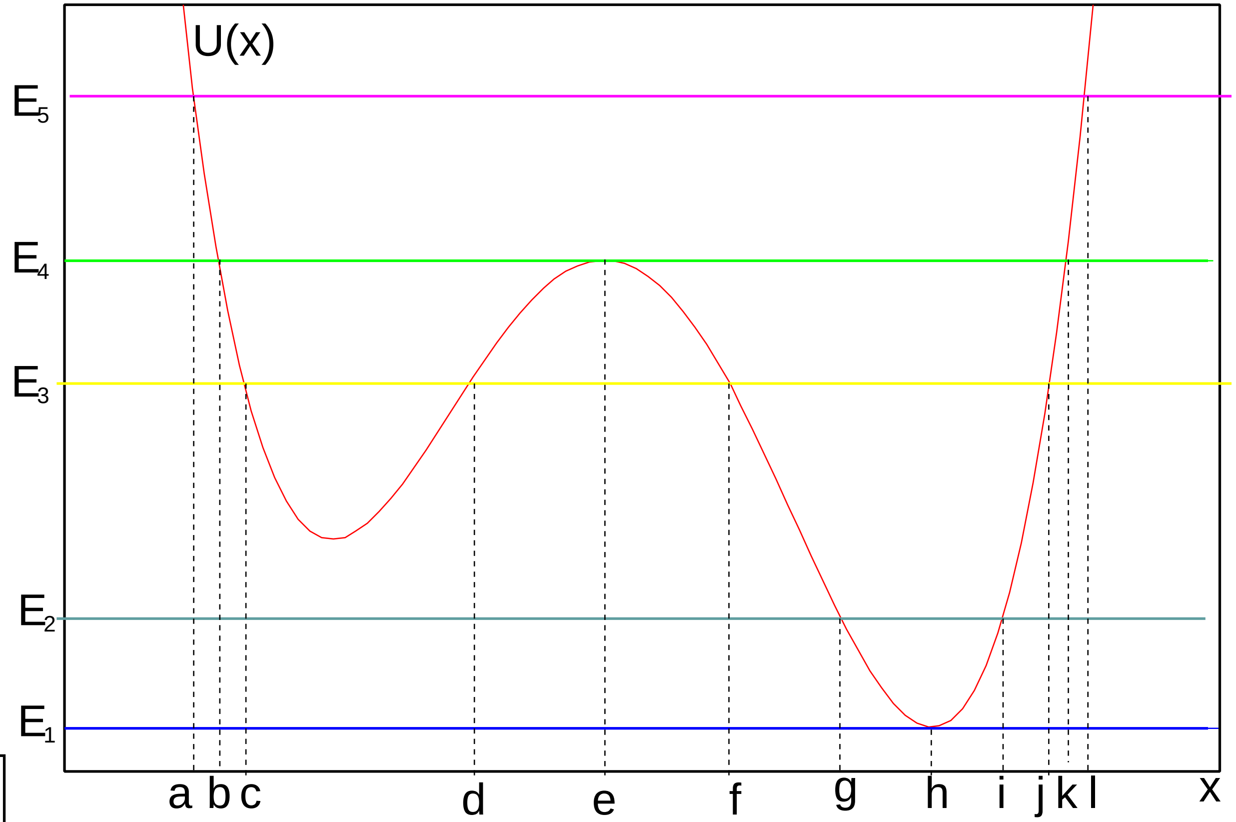
を満たす (力学的エネルギー保存則). 変形して,

$$E - U(x) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 \geq 0. \tag{10}$$

- **質点は, $E - U(x) \geq 0$ であるような x にしか移動できない.**
- **$E - U(x) = 0$ であるような x では, 速度が 0 になる.**

また, 力は $U(x)$ の傾きの (-1) 倍.

これらの性質を用いて, 質点の運動の様子を理解できる.



例

$E = E_1$ **のとき**, $x = h$ **で静止**.

$E = E_3$ **のとき**, $c \le x \le d$ **を往復**. **または**, $f \le x \le j$ **を往復**

$E = E_4$ **のとき**, $x = e$ **で静止**. **または**, $b \le x < e$ **から** $x = e$ **に限りなく近づく**. **または**, $e < x \le k$ **から** $x = e$ **に限りなく近づく**. $(t \to \infty)$

quiz1 $E = E_2, E_5$ **のときの運動を**, **上の例ののりで説明しよう**.

0.2 平衡点と微小振動

位置エネルギーが $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$ となっているような点を 平衡点 という. (上の例の $x = e, h$) 平衡点では力が働かないので, 静かに平衡点に置かれた質点は, ずっと平衡点上にいる.

平衡点 $x = h$ から, わずかにずれた点に置かれた場合を考えよう. $x = h$ の近くを考えるので, $U(x)$ を $x = h$ のまわりにテイラー展開して考えてもよい.

$$
\begin{aligned}
U(x) =& U(x_0) + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \cdots \\
=& U(x_0) + 0 + \frac{1}{2}k \cdot (x - x_0)^2.
\end{aligned} \tag{11}
$$

これはばねについた質点の位置エネルギーと (定数プラスと, 原点ずらしを除いて) 同じ!

ただし, $(x - x_0)^3$ 以降は小さいので無視し, $k = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$ とおいた.

これは,

平衡点 x_0 の近くでは, 質点は, 近似的に,
$x = x_0$ を中心とする, ばね定数 $k = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$ の単振動をする

ことを意味している.

このことは, 質点の運動方程式が, 近似的に

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(U(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2\right) = -k \cdot (x - x_0) \qquad (12)$$

となることからもわかる.

ただし, これは, $k = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$ の場合 (例 $x = h$. 安定な平衡点).

一方, $k = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) < 0$ である平衡点から少しずらすと, どんどん離れていってしまう (例. $x = e$. 不安定な平衡点).

例題 1 位置エネルギー $U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ のもとで，質量 m の質点が運動している．平衡点を求めよう．安定な平衡点については，その周りの微小振動の周期を求めよう．

1

1 等速円運動と単振動

1.1 等速円運動

(x, y) 平面で運動する質量 m の質点を考える.

時刻 t における質点の座標が

$$(x(t), y(t)) = (A\cos\omega t, A\sin\omega t) \tag{13}$$

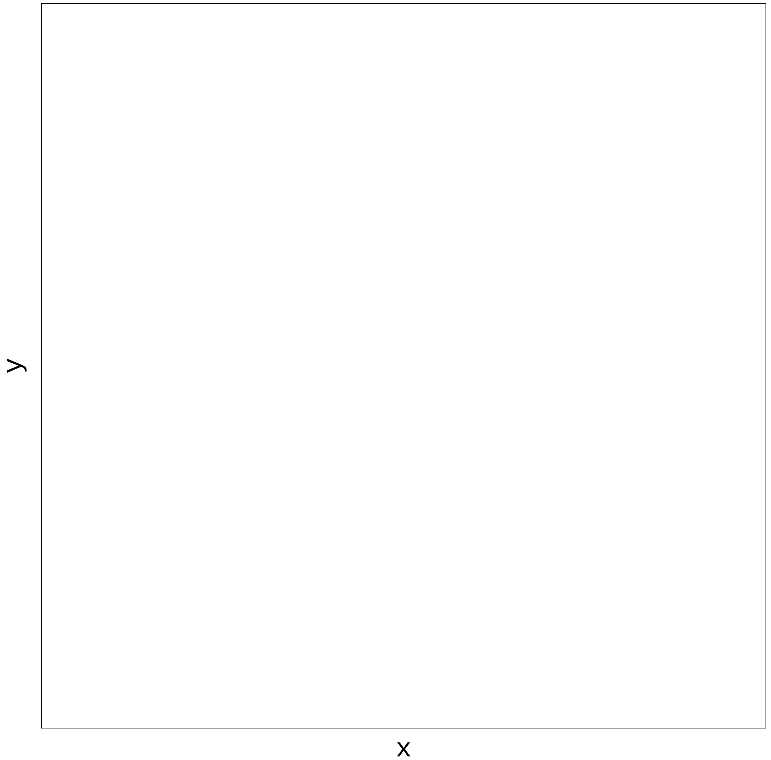
であるような運動を, 原点を中心とする等速円運動という $(A > 0, \omega > 0$ は定数$)$

A は円運動の半径, ω は円運動の角速度. $T = \frac{2\pi}{\omega}$ は円運動の周期.

等速円運動をする質点はどのような力を受けているか?

2 次元の運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \vec{F}, \tag{14}$$



あるいは成分で表示して,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_x, \tag{15}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_y \tag{16}$$

で, (13) を左辺に代入して,

$$F_x = m \times (-\omega^2 A \cos \omega t) = -m\omega^2 x(t) \tag{17}$$

$$F_y = m \times (-\omega^2 A \sin \omega t) = -m\omega^2 y(t) \tag{18}$$

あるいは

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}(t). \tag{19}$$

$$|\vec{F}| = m\omega^2 |\vec{r}(t)| = m\omega^2 A. \tag{20}$$

つまり, 向きが原点向き, 大きさが $m\omega^2|\vec{r}|$ の力 (向心力 という) がはたらいているときに円運動となる ($|\vec{r}|$ は原点からの距離).

1.2 遠心力

ニュートンの運動方程式は 慣性系 で見たときに成立するのだった.

実際, 等速円運動している人の立場で (例. メリーゴーラウンドに乗ってる人. 自転する地球に乗ってる人) の立場に立って考えると, 力 $\vec{F}$ があるのに静止している (加速度が零である) ことになり, 運動方程式は成立しない.

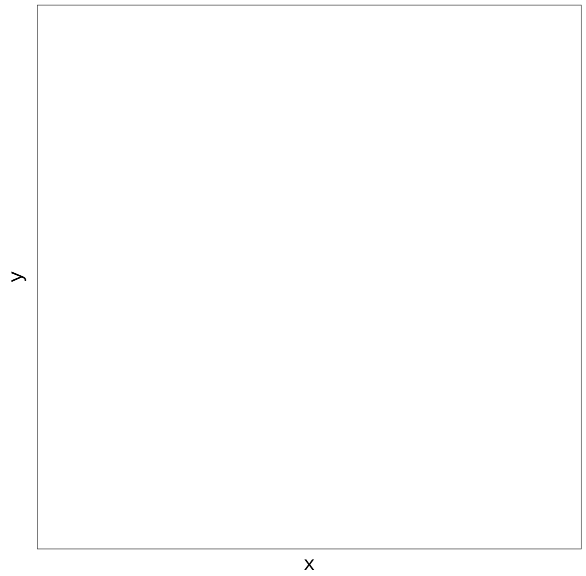
しかし, どうしても等速円運動している人の立場で運動方程式を立てたいときは, 遠心力 $-\vec{F}=m\omega^2\vec{r}$ が働いていて, 向心力 $\vec{F}$ とつりあっていて, 加速度が零になっている, と考える.

遠心力は, 観測者が等速円運動していることを表わすために導入された仮想的な力である.

1.3 単振動と等速円運動

ばねの力を 2 次元にした力

$$\vec{F} = -k\vec{r}, \tag{21}$$



成分で書くと,

$$F_x = -\,kx \tag{22}$$

$$F_y = -\,ky \tag{23}$$

のもとで運動する, 質量 m の質点を考える.

運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,kx(t), \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,ky(t) \tag{25}$$

の解を, 初期条件

$$x(0) = A, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0, y(0) = 0, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = \sqrt{k/m}A \tag{26}$$

のもとで求めよう. $x(t), y(t)$ は別々に求められて, $\omega = \sqrt{k/m}$ とすると,

$$x(t) = A\cos\omega t, \tag{27}$$

$$y(t) = A\sin\omega t \tag{28}$$

となる. つまり, x, y 座標の一方をみると単振動だが, (x, y) としてみると $\boxed{\text{等速円運動}}$ である. 実際, $\boxed{t \text{ を消去して軌跡を求める}}$ と,
$x(t)^2 + y(t)^2 = A^2$ となる.

- 2 次元の力 $\vec{F} = -k\vec{r}$ のもとでは等速円運動が起きることがある
- 等速円運動する質点の x 座標 (あるいは y 座標) だけをみると単振動になっている.

ファイナルトライアル

2003/01/31(金)3 講時. 1-107. 座席指定します.

科目の成績は 100 点= quiz 10 + 秋のプチテスト 15 + 冬のプチテスト 25 + ファイナルトライアル 50.

ただし, 上の式に関わらず, 秋のプチテスト, 冬のプチテスト, 毎回の quiz から計算される点数がすべて 1 点以上である人は, ファイナルトライアルが 50 点中 35 点以上であれば無条件に合格とします.

試験範囲は基本的にすべてですが,

- 放物運動, 動摩擦力, 静摩擦力については出題しません.
- エネルギー保存則について出題します.
- 単振動/減衰振動/過減衰について出題します.
- 変数分離型微分方程式, $a\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + cx(t) = d$ 型微分方程式について出題します.