| 全体 | 目次 | 前回 | 次回 | 略解 |
樋口さぶろお[a] 更新 `Time-stamp: "2003/09/26 Fri 12:41 hig"`

物理数学☆演習 II

- 講義の Web page

  http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/

  また,

  http://hig3.net　(携帯にも対応)

  からも容易にたどれます.

- この紙は, 上の Web page や 1-508 前の引き出しで事前に配っていることもあります.

- 成績は 100 点=平常点 10 + 秋のプチテスト 15 + 冬のプチテスト 25 + ファイナルトライアル 50. プチテストの日程は追って連絡します.

- 毎回, 理解を確かめる quiz をします. 配った紙に解いて提出してください. フォルダーを学籍番号でグループ分けしています.
- 紙は, チェックした後, 1-508 前の引き出しで返却します. ただし, 数週間以上経過したものは処分することがあります.
- $\boxed{\text{戸田 n.m}}$, $\boxed{\text{戸田 p99}}$ などは, 教科書 (戸田, 力学) の参照個所を示します.
- TA 大槻 真也さん (樋口研), 辻 祐介さん (樋口研), 前 直弘さん (飯田研).
- 再履修の方へ: 2002 年度以前の内容と同じではありません (重なる部分は多いですが)
- 前期の物理数学☆演習 I ファイナルトライアルの答案をお返しします. 下の時間帯に, 樋口の部屋**ではなく**実験室で院生の人から受け取ってね (要学生証). 9 月 26 日 (金) 13:10–14:40 1-539 実験室.

1. ニュートンの運動の 3 法則

1.1 第 2 法則 (ニュートンの運動方程式)

戸田 2-2

t: 時刻 , $\mathbf{r}(t)$: 位置ベクトル, $\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)$: 速度ベクトル, $\mathbf{r}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)$: 加速度ベクトル.

物体の加速度 $\mathbf{a}(t)$ は, 物体の受ける 力 ベクトル $\mathbf{F}(t)$ で決まる.

加速度 $\mathbf{a}(t)$ の向き: 力 $\mathbf{F}(t)$ の向きと同じ.

加速度 $\mathbf{a}(t)$ の大きさ: 質量 m に反比例, 力 $\mathbf{F}(t)$ の大きさに比例.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{1}{m}\mathbf{F}(t) \quad \text{すなわち} \quad \boxed{1 \qquad\qquad\qquad} \tag{1}$$

これを ニュートンの運動方程式 という.

基本ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を使って $\mathbf{F}(t) = F_x(t)\mathbf{i} + F_y(t)\mathbf{j} + F_z(t)\mathbf{k}$ と成分で書くと

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_x(t), \tag{2}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_y(t), \tag{3}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_z(t). \tag{4}$$

位置		速度		加速度
$\mathbf{r}(t)$	微分 $\longrightarrow$ 積分 $\longleftarrow$	$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)$	微分 $\longrightarrow$ 積分 $\longleftarrow$	$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)$

2

例題 1

時間を t **とするとき, ある質量** $m = 4$ **の粒子の位置ベクトルの** x **成分は** $x(t) = \frac{1}{4}(1 - \mathrm{e}^{-4t}) + 1$ **である. 速度ベクトルの** x **成分は** $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$, **加速度ベクトルの** x **成分** $a(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ **を求めよ. 力の** x **成分** $F(t)$ **を求めよう.**

3

例題 2

質量 m の物体に重力 $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ がはたらいている．このとき，物体の運動は，

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} + \mathbf{A}t + \mathbf{B} \tag{8}$$

と書ける．ただし，A, B は時間によらないベクトル．これが第 2 法則を満たすことを示せ．

4

1.2 第 1 法則 (慣性の法則)

戸田 2-1

第 2 法則で, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ のとき,

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \mathbf{0}\,(= \mathbf{F})\,. \tag{9}$$

物体は, ‘力’ の作用を受けないかぎり, 等速直線運動をする. (特に, 速度 0 すなわち静止の場合もある)

例: エアホッケーのパック, 電車の中の風船, 無重力状態の宇宙飛行士.

例でないもの: 地面を転がるボール, 自転車, 自動車.

観測者は地面に固定されているとは限らない.

等速直線運動する電車, 飛行機, エレベータでもよい. 慣性系

5

では成り立たない.

1.3 第 3 法則 (作用 · 反作用の法則)

戸田 2-3

物体 1 が物体 2 に力 $\mathbf{F}_{12}$ を及ぼすとき, 物体 2 も物体 1 に力 $\mathbf{F}_{21}$ を及ぼす. その向きは反対, 大きさは同じ.

$$\boxed{6 \qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{10}$$

例: 銃の発射の反動. 地球とりんご (重力). 下敷と髪の毛 (電気力), 水に浮かぶ 2 せきのボートで, 一方がもう一方を押したとき.

1.4 運動方程式を解く

しばらく, 運動が x 方向に限られた場合を考えよう. つまり,

$$\mathbf{r}(t)=(x(t),0,0),\quad \mathbf{v}(t)=(v(t),0,0),\quad \mathbf{a}(t)=(a(t),0,0),\quad \mathbf{F}=(F,0,0)$$

の $x(t),v(t),a(t),F$ だけを考えよう.

力 F が与えられたときに, 運動方程式を解いて $x(t)$ を求めるのが, 力学の典型的な問題.

例題 3

時間を t とする. 質量 $m=1$ の物体が, 力 $F=\mathrm{e}^{-t}$ を受けて運動している. 時刻 $t=0$ で $x=0$ に静止していた物体の運動を求めよ.

言葉の使い方:

運動を求めよ $\Leftrightarrow$ 時刻 t での位置 $x(t)$ を求めよ.

静止していた $\Leftrightarrow$ 速度が 0 だった $\Leftrightarrow v(0)=0$.

7

8

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t} + t - 1. \tag{18}$$

これで運動方程式が'解けた' ($x(t)$ **が求まった**).

別解

神の啓示により, $x(t) = \mathrm{e}^{-t} + t - 1$ **とおいてみると**,

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t} + t - 1. \qquad x(0) = 0. \tag{19}$$

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 1. \quad v(0) = 0. \tag{20}$$

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = +\mathrm{e}^{-t}. \tag{21}$$

よって, **解になっている**.

これは前の解き方の検算にもなっている. **前の解き方をしたときは検算を必ずしよう**.

運動方程式を解くために積分 (2 **回**!) **すると**, **積分定数** (2 **個**) **が出てくる**. **これを決定するのに**, **初期条件** (2 **個**. **今なら** $x(0), v(0)$) **を使う**.

1.5 力の働かないときの 3 次元の運動

$$\text{力が働かない} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \mathbf{0} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \rightsquigarrow \begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0. \end{cases} \tag{22}$$

$x(t)$ **は, 上の方法で求められる**.

9

y, z **成分も同様**.

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \times t + D_1, \\ y(t) = C_2 \times t + D_2, \\ z(t) = C_3 \times t + D_3, \end{cases} \quad \text{別の書き方} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \tag{25}$$

または

$$\boxed{\quad 10 \quad} \tag{26}$$

等速直線運動! $\cdots$ **第 1 法則の結論**

$C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ **は積分定数**.

1.6 微分方程式

未知関数 $x(t)$ に関する方程式で, 微分を含んでいるものを 微分方程式 という.

求めるのは未知数でなく未知関数!

$x(t)$ を求める (微分を含まない式にする) ことを, 微分方程式を解く (微分方程式を積分する) という.

$x(0)=0$ や $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(3)=2$ のような, 特定の時刻 t についての条件を, 初期条件 という.

ここまで出てきた微分方程式はいちばん簡単なタイプ. (2 階常微分方程式の中の特別に簡単なもの)

quiz 1

物理数学☆演習 I, 物理学序論の感想, 物理数学☆演習 II への希望, きょうの授業に対する感想 (速すぎた, 遅すぎた, まだ習っていないことを習っているかのように扱っている, 他の授業と記号が違う, プロジェクター/黒板が見にくい, など) を何でも書いてください. なお, `http://hig3.net` からも随時メッセージを送れます.

quiz 2

時間を t とする. 質量 $m=1$ の物体が, 力 $F=-\cos t$ を受けて運動している. 時刻 $t=0$ で $x=1$ に静止していた物体の運動を求めよう.

quiz 3

時間を t とするとき, ある粒子の速度ベクトルの x 成分は $v(t)=-\sin(4t)$ である. 加速度ベクトルの x 成分 $a(t)$ と, 位置ベクトルの x 成分 $x(t)$ とを求めよう. ただし, $x(0)=1$.

樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp:"2003/10/02 Thu 12:16 hig"

1.7 先週の quiz

quiz 略解 1

ご意見ありがとうございました.

quiz 略解 2

2 回積分すると, $x(t) = \cos(t) + C_1 t + C_2$. 初期条件 $x(0) = 1, v(0) = 0$ より, 積分定数を決めて $x(t) = \cos(t)$.

quiz 略解 3

加速度は, $v(t)$ を t で微分して $a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -4\cos(4t)$.

---

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

位置は, t **で積分して** $x(t) = \frac{1}{4}\cos(4t) + C$. **初期条件** $x(0) = 1$ **より** $C = \frac{3}{4}$. $x(t) = \frac{1}{4}\cos(4t) + \frac{3}{4}$.

2. 変数分離型微分方程式

今日の目標

- 空気抵抗の力 (だけ) を受ける物体の運動方程式が書ける
- 変数分離型微分方程式が解ける.

2.1 空気抵抗のある場合の運動

戸田 p.34

空気抵抗だけを受ける, 1 次元の運動を考えよう. たとえば, エアホッケーのパックの運動.

物体の受ける 空気抵抗 は, 向きは速度 $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ と反対向き, 大きさは速さ $|v(t)| = |\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)|$ に比例.

$$\text{空気抵抗の力} \quad |F| = k|v(t)| = k\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right| \quad (k \text{ は正の比例定数}) \tag{27}$$

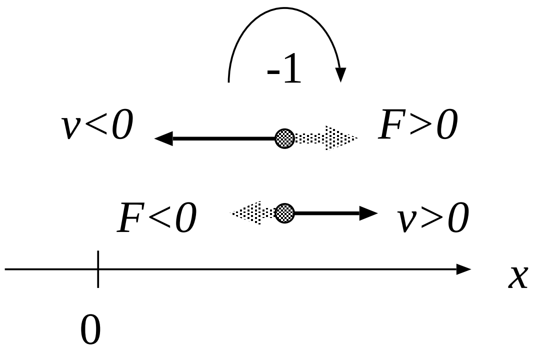
向きまで真剣に考えよう.

$$\text{空気抵抗の力}\quad F = k \times (\mp 1) \times \left| \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \right| = -k \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{28}$$

符号がこれでよいこと. $-$: 物体が右向き, $+$: 物体が左向きの運動.

速度	$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$	1 行目 $\mp 1 \times \lvert \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \rvert$	2 行目 $-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$
右向き	$(+)$	$(-) \times (+) = (-)$	$(-) \times (+) = (-)$
左向き	$(-)$	$(+) \times (+) = (+)$	$(-) \times (-) = (+)$

$-k \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ の $-$ は速度ベクトルと反対向きの力であることを意味.



質量を m とすると運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{29}$$

1 階微分で書こう. $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ なので,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{k}{m}v(t).} \tag{30}$$

しばらくこのタイプの微分方程式の解を考えよう. 微分すると自分の $-k/m$ 倍になる関数って何?

$$v(t) = \boxed{\quad 11 \quad} \tag{31}$$

2.2 変数分離型微分方程式の解き方

和達 p.66

例題 4

次の性質を満たす関数 $x(t)$ **を求めよう**.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t), \qquad \text{初期条件 } x(0) = 4. \tag{32}$$

(**文字** v **を** x **に変えましたが**, **深い意味はありません**).

間違いの例 1. **両辺を '積分' して**,

$$x = x^2 + C.\text{よって } x = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4C}}{2}. \tag{33}$$

あれっ, x **って** t **の関数** $x(t)$ **じゃなかったの**?

間違った点:

12

両辺を t **で積分する** (**両辺に** $\int \cdots \mathrm{d}t$ **をつける**) **ならよい**.

間違いの例 2. **両辺を** t **で積分して**,

$$x(t) = \int 2x(t)\mathrm{d}t + C. \tag{34}$$

正しくない点: 13

2 **次方程式** $x^2 + 2x + 1 = 0$ **の解を** $x = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)$ **と答えるようなもの**.

正しい解き方の例

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t) \tag{35}$$

まず $x(t)$ **を左辺に集める．今の式には** t **はないが，あれば右辺に集める．以下の例題を参照．**

$$\frac{1}{x(t)}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2 \tag{36}$$

両辺を t **で積分**

$$\int \frac{1}{x(t)}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\ \mathrm{d}t = \int 2\ \mathrm{d}t \tag{37}$$

ここで，

$$\textbf{右辺} = \int 2\ \mathrm{d}t = 2t + C_1. \tag{38}$$

一方, 左辺で変数変換. 変数を t から $s = x(t)$ に変えて置換積分.

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t \tag{39}$$

なので,

$$\text{左辺} = \int \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \log|s| + C' = \log|x(t)| + C_2. \tag{40}$$

よって,

$$\log|x(t)| = 2t + C' (= 2t + C_1 - C_2) \tag{41}$$

これを整理し, 初期条件を使うと, $x(t) = 4\mathrm{e}^{2t}$. (後で黒板でやります)

2.3 覚え方 (この科目の quiz や試験ではこのやり方でいい)

14

15

$$x(t) = 4\mathrm{e}^{2t}.$$

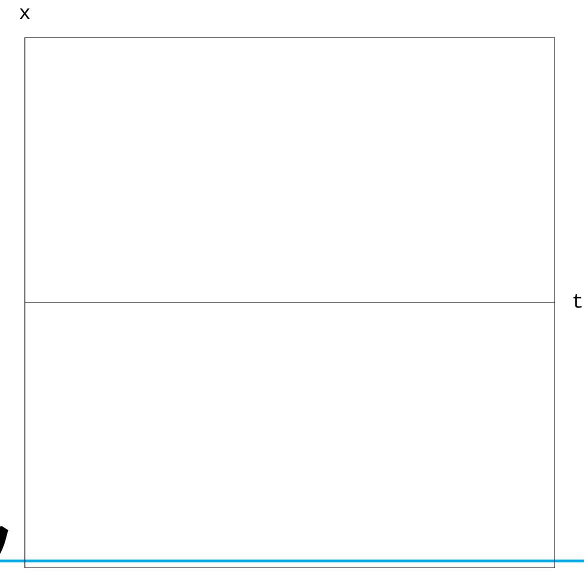
空気抵抗のある場合の運動の解

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{k}{m}v(t), \quad v(0) = C \tag{45}$$

の解は

16

グラフ



$$v(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}. \tag{46}$$

2.4 一般の変数分離形

上で見た解き方は,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(x)g(t) \tag{47}$$

のような形 (変数分離形) のときに使える.

いままでやってきた微分方程式も, 実は変数分離形と思える. 当面, すべての微分方程式はこの方法で解くと考えよう.

変数分離形でない例

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = t + x(t) \tag{48}$$

右辺が掛け算じゃない.

例. 落体の運動

運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -mg \tag{49}$$

これは変数分離形 ($f(x) = 1, g(t) = -mg$ **などと思える**). **両辺に** $\mathrm{d}t$ **をかけて**

$$\mathrm{d}v = -\,g\,\mathrm{d}t \tag{50}$$

両辺に $\int$ **をつけて**

$$\int 1\,\mathrm{d}v = \int (-g)\,\mathrm{d}t + C \qquad (C \text{ は積分定数}) \tag{51}$$

$$v(t) = -\,gt + C \tag{52}$$

例題 5

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{t}{x(t)}, \qquad x(0) = 2. \tag{53}$$

を解こう

17

quiz 4

次の微分方程式を, それぞれ, 初期条件のもとで解こう.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -3x(t), \quad x(0) = 2. \tag{54}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -x(t)^2, \quad x(0) = 2. \tag{55}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -t^2, \quad x(0) = 2. \tag{56}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -1 - x(t), \quad x(0) = 2. \tag{57}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = t \cdot x(t), \quad x(0) = 2. \tag{58}$$

樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp:"2003/10/02 Thu 12:16 hig"

2.5 先週の quiz

quiz 略解 4

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -3x(t), \quad x(0)=2. \rightsquigarrow x(t) = C\mathrm{e}^{-3t}, \quad C=2. \tag{59}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -x(t)^2, \quad x(0)=2. \rightsquigarrow x(t) = \frac{1}{t+C}, \quad C=1/2. \tag{60}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -t^2, \quad x(0)=2. \rightsquigarrow x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + C, \quad C=2. \tag{61}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -1-x(t), \quad x(0)=2. \rightsquigarrow x(t) = -1 + C\mathrm{e}^{-t}, \quad C=3. \tag{62}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = t \cdot x(t), \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}, \quad C = 2. \tag{63}$$

ちょっと解説.

18

3. 空気抵抗のある場合の落下運動

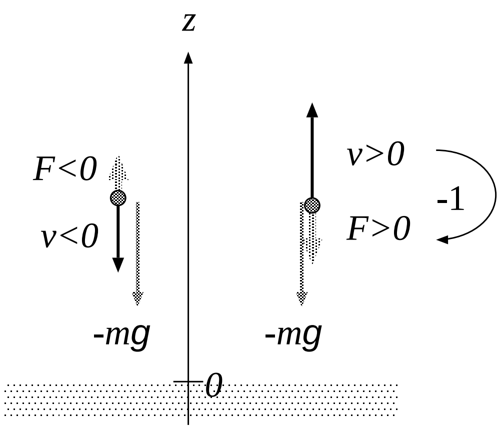
今日の目標

- 空気抵抗の力と重力の両方を受けて鉛直方向にだけ運動する物体の運動方程式が書ける.
- なぜありさんは通天閣からを落ちてもけろっとしてるかわかる.
- 変数分離型微分方程式が, 部分分数展開で解ける.

3.1 鉛直方向の運動

戸田 p.34

質量 m の物体が重力 $-mg$ と空気抵抗の力 $-k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ のもとで運動する. 鉛直上向きに z 軸をとり, 時刻 t の位置を $z(t)$ とする.



運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + \quad k \times \begin{cases} +\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right| & (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) < 0, \downarrow) \\ -\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right| & (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) > 0, \uparrow) \end{cases} \tag{64}$$

$$= -mg + \quad k \times (-1) \times \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \tag{65}$$

第 2 項 $k \times (-1) \times \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ の符号がこれでよいこと.

速度	$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$	$(\pm 1) \times \left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right|$(1 行目)	$(-1) \times \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$(2 行目)
下向き $\downarrow$	$(-)$	$(+) \times (+) = (+)$	$(-) \times (-) = (+)$
上向き $\uparrow$	$(+)$	$(-) \times (+) = (-)$	$(-) \times (+) = (-)$

$k \times (-1) \times \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ の (-1) は速度ベクトルと反対向きの力であることを意味.

(65) を解こう.

2 階は 1 階ずつ考えるのだった. $v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ **とおいて,**

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -g - \frac{k}{m}v(t). \tag{66}$$

を $v(t)$ **について解く. これは変数分離型なので,** v **を左に** t **を右に.**

19

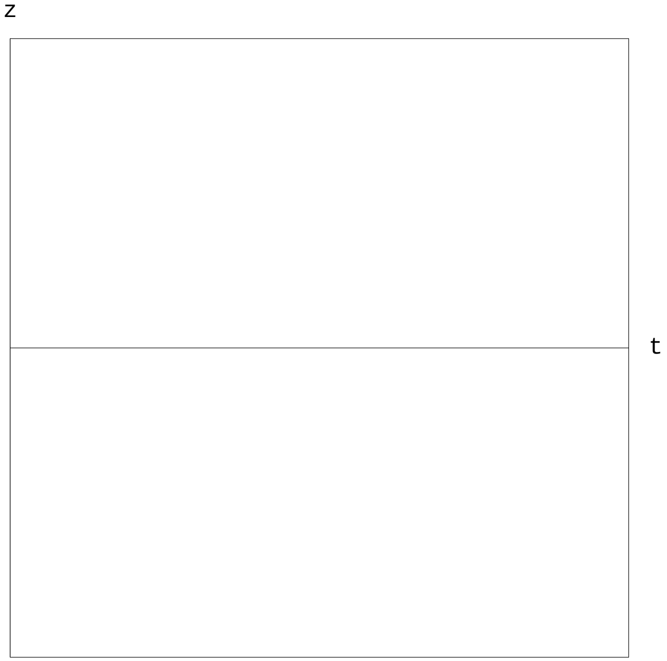
よって解は,

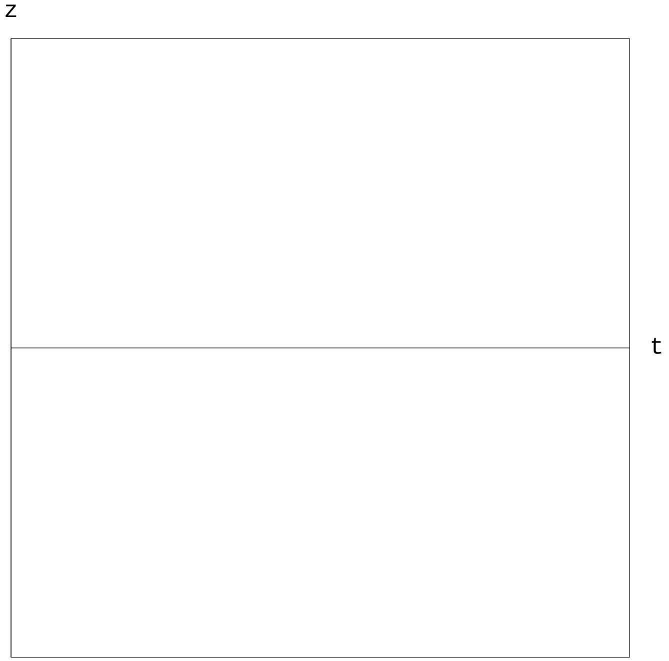
$$v(t) = \boxed{}^{20} \tag{67}$$

$v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ なので, これをもう一度, $z(t)$ についての変数分離型微分方程式とみて解く.

21

$$z(t) = C_2 - \frac{mg}{k}t + C_1 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{68}$$





3.2 終端速度

戸田 p.56

上の解から, $t \to \infty$ **で** $v(t) \to v_\infty = -\frac{mg}{k}$ **となることがわかる. この** v_∞ **を** 終端速度 **という. 終端速度は, 微分方程式を解かなくても,** $0(=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)) = -g - \frac{k}{m}v_\infty$ **を解くだけで得られる. なぜなら**

22

例題 6

通常, 空気抵抗の力の大きさは, 速度に比例するが, 仮に, 速度の 2 乗に比例する空気抵抗と重力とを受ける物体があったとする. 時刻 $t=0$ に, 速度 $v_0(<0)$ で発射する. 運動方程式をたて, 速度 $v(t)=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ について解け. 終端速度 v_∞ はどれだけか. 質量を m, 比例定数を k とする.

運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + \boxed{\quad 23 \quad} \tag{69}$$

問題の運動では, 常に $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)<0$ であるので,

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -g + \frac{k}{m}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 \times (+1) \tag{70}$$

よって, $v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ **に対して**

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -g + \frac{k}{m}v(t)^2 \tag{71}$$

を解く.

3.3 部分分数展開

微分積分 p.78

上の微分方程式を解こう．記号が多いとややこしいので，まず,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{k}{m}\left(v(t)^2 - \frac{mg}{k}\right) \tag{72}$$

で $a = \frac{k}{m}, b = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ **とおく**.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = a\cdot(v(t)^2 - b^2), \qquad \textbf{初期条件} \quad v(0) = v_0 \tag{73}$$

を考えよう．変数分離形なので,

$$\frac{1}{v^2 - b^2}\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t \tag{74}$$

ここで,

24

より, **部分分数展開**

$$\frac{1}{v^2-b^2}=\frac{1}{2b}\left(\frac{1}{v-b}-\frac{1}{v+b}\right)$$

を利用すると,

25

26

$$v(t) = b \times \frac{1 + C''\mathrm{e}^{2abt}}{1 - C''\mathrm{e}^{2abt}} = -b \times \frac{C'' + \mathrm{e}^{-2abt}}{C'' - \mathrm{e}^{-2abt}}$$

3.4 きょうの quiz

quiz 5

次の変数分離型微分方程式を解こう．積分定数は決めなくてよい．(Hint. **右辺を因数分解して部分分数展開**)

$$3 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = x(t)^2 + x(t) - 2 \tag{75}$$

quiz 6

1 次元を運動する質量 $m=1$ の物体の, 時刻 t の位置を $x(t)$ とする. この物体は, 速度 $v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ によって決まる力 $F=-2v(t)-v(t)^2$ を受けている. 時刻 $t=0$ での速度は $v(0)=1$ である.

1. 運動方程式を書こう.
2. 初期条件を書こう (1 個しかない).
3. 時刻 t における速度 $v(t)$ を求めよう.
4. 時刻 $t=1$ における速度 $v(1)$ を求めよう.

樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp:"2003/10/02 Thu 12:16 hig"

チューターに質問しよう!

大学院生のチューターのみなさんが質問に答えてくれます．予約などはいりません．でも，たまに予定変更あります．

曜日	時間	部屋		
		1-530	1-541	1-615
月	12:30 − 13:30	田中		前
火	12:30 − 13:30		渡邊	前
水	12:30 − 13:30	田中		
木	12:30 − 13:30	佐々木		
金	12:30 − 13:30	佐々木	渡邊	

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

ニュース! 10/31(金) に秋のプチテストあります! 掲示参照. 変数分離形の解き方は超重要です.

ニュース! 10/31(金) に実用数学検定過去問検討会やります! 掲示参照.

3.5 先週の quiz の略解

quiz 略解 5

部分分数展開

$$3 \cdot \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \tag{76}$$

を用いて,

$$x(t) = \frac{1 + 2C\mathrm{e}^t}{1 - C\mathrm{e}^t}. \tag{77}$$

quiz 略解 6

27

28

3.6 再び落下運動と終端速度

戸田 p.56

前回 3.3 **で求めた速度の式**

$$v(t) = b \times \frac{1 + C'' \mathrm{e}^{2abt}}{1 - C'' \mathrm{e}^{2abt}} = -b \times \frac{C'' + \mathrm{e}^{-2abt}}{C'' - \mathrm{e}^{-2abt}} \tag{80}$$

で, $a = \frac{k}{m}, b = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ **を元に戻すと**,

$$v(t) = -\sqrt{\frac{mg}{k}} \times \frac{C'' + \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}}{C'' - \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}}. \tag{81}$$

初期条件 $v(0) = v_0$ **より**, $C'' = \frac{v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v_0 + \sqrt{\frac{mg}{k}}}$. **ここで**, $\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t} \to 0$

$(t \to \infty)$ **より**

$$\textbf{終端速度}\ v_\infty = \boxed{29} \tag{82}$$

これは

$$\boxed{ 30 } \tag{83}$$

からも求まる. $\pm$ **のうち** $-$ **をとるのは下向きの運動だから**.

以下, **先週の箱 22 にいれるべき内容**.

$t \to +\infty$ **で** $v(t) \to v_\infty$ **と収束するとすると**, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) \to 0$ **となるはず**. **したがって**, **運動方程式**

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = F(v(t)) \tag{84}$$

で $t \to +\infty$ **としたものは**,

$$0 = F(v_\infty). \tag{85}$$

ここから終端速度 v_∞ **が求められる**.

例題 7

高さ h の塔のうえに, ボール (質量 m) が支えられていた. 時刻 $t=0$ に, 支えを静かにはずしたところ, ボールは, 重力 (重力加速度の大きさ g) と, 速度に比例する空気抵抗の力 (比例定数 $k>0$) を受けて落下した.

鉛直上向きに z 軸を取る. 原点を地表とする. 時刻 t でのボールの位置を $z(t)$ とし, $v(t)=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ とする.

$v(t), z(t)$ を求めよう.

31

32

4. 空気抵抗のある 3 次元の運動

4.1 空気抵抗がない場合の放物運動

戸田 p.52

物理数学☆演習 I の 9.4 でやったことの復習です.

鉛直方向に z 軸, 水平面内に x, y 軸をとる. 地表の高さを $z = 0$ とする.

地表近くの, 質量 m の物体には,

大きさ mg, 鉛直下向きの $\boxed{\text{重力}}$ $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -mg)$ が働く.

$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$: $\boxed{\text{重力加速度}}$.

$$\rightsquigarrow \begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = V_x t + C_x, \\ y(t) = V_y t + C_y, \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_z t + C_z. \end{cases} \tag{86}$$

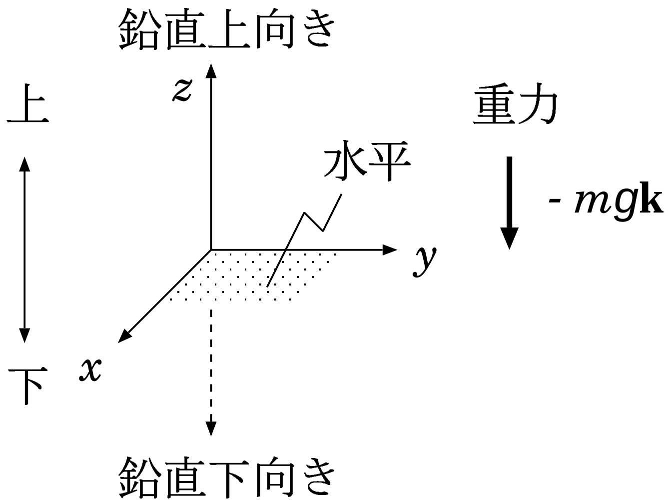
積分定数 $V_x, V_y, V_z, C_1, C_2, C_3$. 2 階 $\times$ 3 次元 $= 6$ 個.

簡単のため, $C_x = C_y = C_z = 0, V_y = 0.$

$$y(t) = 0, \tag{87}$$

$$x(t) = V_x t, \tag{88}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_z t. \tag{89}$$



軌跡

$x(t)$ **の式と** $z(t)$ **の式から** t **を消去して**

$$z = -\frac{1}{2}\frac{g}{V_x^2}(x - x_{\mathrm{m}})^2 + z_{\mathrm{m}} \tag{90}$$

ただし,

$$x_{\mathrm{m}} = \frac{V_x V_z}{g}, \quad z_{\mathrm{m}} = \frac{V_z^2}{2g}. \tag{91}$$

これって $\boxed{\textbf{放物線}}$!

4.2 空気抵抗がある場合の放物運動

戸田 p.55

重力の他に, 速さに比例する空気抵抗の力 (比例定数 $k > 0$) があるとする. z 軸の正の向きの方向の単位ベクトルを $\mathbf{k}$ とかくと, 位置 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ に対する運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\mathbf{k} - k\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t). \tag{92}$$

成分で書いて,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{33\qquad\qquad}, \tag{93}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 - k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t), \tag{94}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{34\qquad\qquad} \tag{95}$$

$y(t)$ は $x(t)$ と同じなので, 以下, $x(t), z(t)$ を考える.

まず, $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$, $v_z(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ に対する 1 階の微分方程式と考え,

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(t) = -kv_x(t), \tag{96}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}(t) = -mg - kv_z(t) \tag{97}$$

を別々に変数分離型微分方程式として解く. 先週の結果から,

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{98}$$

$$v_z(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{mg}{k} + C'\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{99}$$

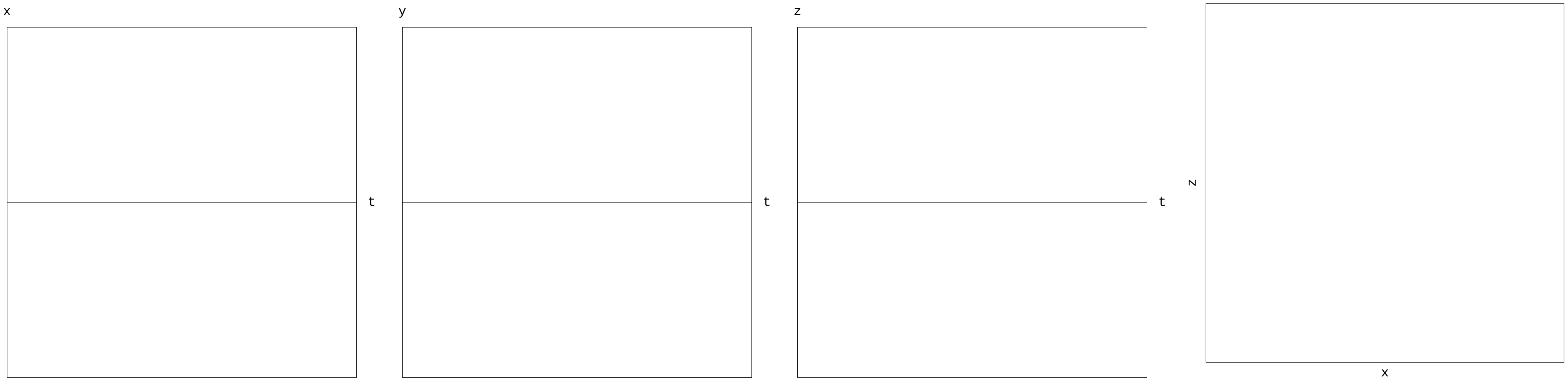
少し記憶力に頼って楽する方法

35

もう一度積分して $x(t), z(t)$ を求めると,

$$x(t) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}, \tag{100}$$

$$z(t) = C_3 - \frac{mg}{k}t + C_4 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{101}$$



	終端速度 v_∞	x **方向の到達距離**
空気抵抗あり	36	$< C_1$
空気抵抗なし	37	$2x_\mathrm{m}$

終端速度だけ簡単に求めてみよう

38

quiz 7

質量 m の物体の鉛直方向 1 次元の運動を考える．上向きを z 軸の正の向きにとり，時刻 t の位置を $z(t)$ とする．下向きの重力 mg と，速さの 3 乗に比例する空気抵抗 $F = -\beta \cdot (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t))^3$ $(\beta > 0)$ がはたらいているとする．

1. **運動方程式を書こう．**
2. **終端速度 v_∞ を求めよう．**

quiz 8

通常，空気抵抗の力の大きさは，速度に比例するが，仮に，速度の 3 乗に比例する空気抵抗を受ける質量 m の物体があったとする (比例定数を $\beta > 0$ とする)．座標を x として，物体が他に力を受けない場合の運動を運動方程式を解いて求めよう (積分定数は決定しなくてよい)．

quiz 略解 7

1.
$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg - \beta \cdot (\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t))^3. \tag{102}$$
$v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ とすると, $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -mg - \beta \cdot v(t)^3$ とかける.

2. $t \to +\infty$ で, $v(t) \to v_\infty$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) \to 0$ となるとすると,
$0 = -mg - \beta \cdot (v_\infty)^3$. よって, $v_\infty = -(mg/\beta)^{1/3} < 0$.

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

quiz 略解 8

1 次元の運動なので, 時刻 t の座標を $x(t)$ とする. 運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \beta\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right|^3 \times \left\{\begin{array}{ll}(-1) & (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) > 0) \\ (+1) & (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) < 0)\end{array}\right\} = -\beta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^3.$$

$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおいて,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{\beta}{m}v(t)^3. \tag{103}$$

これは変数分離形.

$$\int \frac{1}{v^3}\mathrm{d}v = -\int \frac{\beta}{m}\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{v^2} = -\frac{\beta}{m}t + C \quad (C\ \textbf{は積分定数})$$

$$v(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2\beta}{m}t - 2C}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2\beta}}\frac{1}{\sqrt{t + C_1}} \overset{t\to\infty}{\to} v_\infty = 0.$$

$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **なので**, **もういちど変数分離形**.

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{m}{2\beta}} \times 2 \times \sqrt{t + C_1} + C_2.$$

5. 斜面に沿う運動と摩擦力

戸田 3-2

今日の目標

- 斜面をすべる物体の運動方程式がたてられる ⇒ 垂直抗力
- 摩擦力を含む運動方程式がたてられる

以下, i, j, k は基本ベクトル (x, y, z 軸の正の向きの単位ベクトル) です. 物理数学☆演習 I 参照.

5.1 なめらかな水平面上の運動 (摩擦なし)

力を受けずになめらかな机の面をすべる運動を考える. 運動方程式は x 方向の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \rightsquigarrow x(t) = C_1 t + C_2, \tag{104}$$

あれっ, でも重力 $-mg$ がはたらいてるのでは? z 方向の運動方程式を

考えよう.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg \quad \boxed{39} \tag{105}$$

机が物体を押し返す力, 垂直抗力 N がはたらいていると考える.

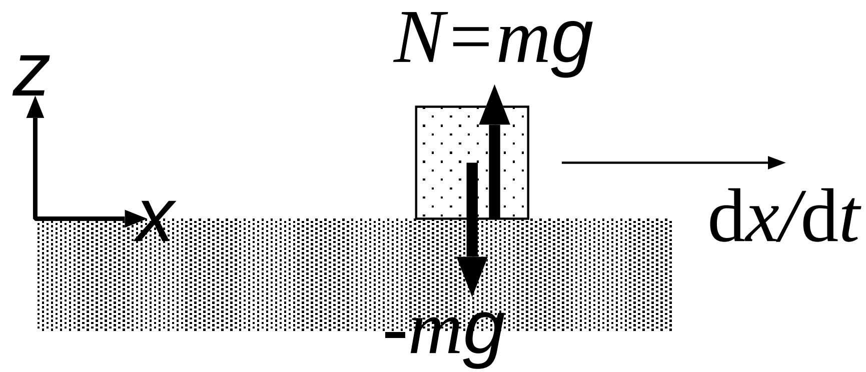
すべての時刻について $z(t) = 0$ であることから, $N = mg$ と定まる.

今までは, 運動方程式を使って, 与えられた力から運動を求めていた. 机のように, 運動を制限するものがあるときは, 運動から力を求める場合がある. これはその初めての例.

ベクトルを用いて,

$\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$: 重力, $\mathbf{N} = N\mathbf{k}$: 垂直抗力で書くと,

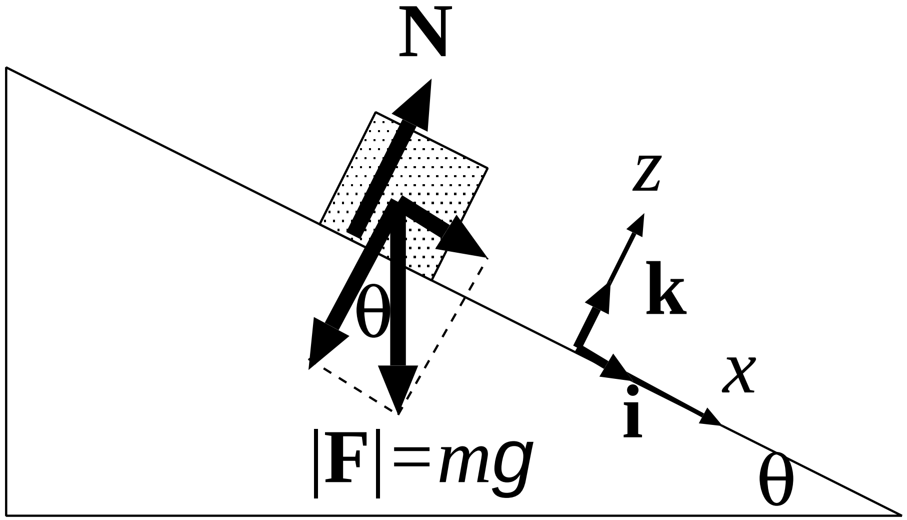
$$m\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \mathbf{F} + \mathbf{N} = \mathbf{0} \tag{106}$$



5.2 なめらかな斜面に沿う運動 (摩擦なし)

戸田 p.34-35

水平から θ だけ傾いたなめらかな斜面をすべる物体 (質量 m) を考える. 図のように, x, z 軸をとる.



はたらく力は, $\mathbf{F}$: 重力, $\mathbf{N}$: 垂直抗力.

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F} + \mathbf{N}. \qquad (107)$$

40

なので,

$$x \text{ 方向} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = +mg\sin\theta, \qquad (108)$$

$$z \text{ 方向} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\cos\theta + N. \qquad (109)$$

例題 8

上の状況で, 時刻 $t = 0$ に, $x = x_0$ から, 斜面に沿って上向きに速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_{x0} < 0$ で発射したときの運動を, 運動方程式を解いて求めよう.

41

x_0, v_{x0} **を積分定数として,**

$$x(t) = \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2 + v_{x0}t + x_0, \tag{110}$$

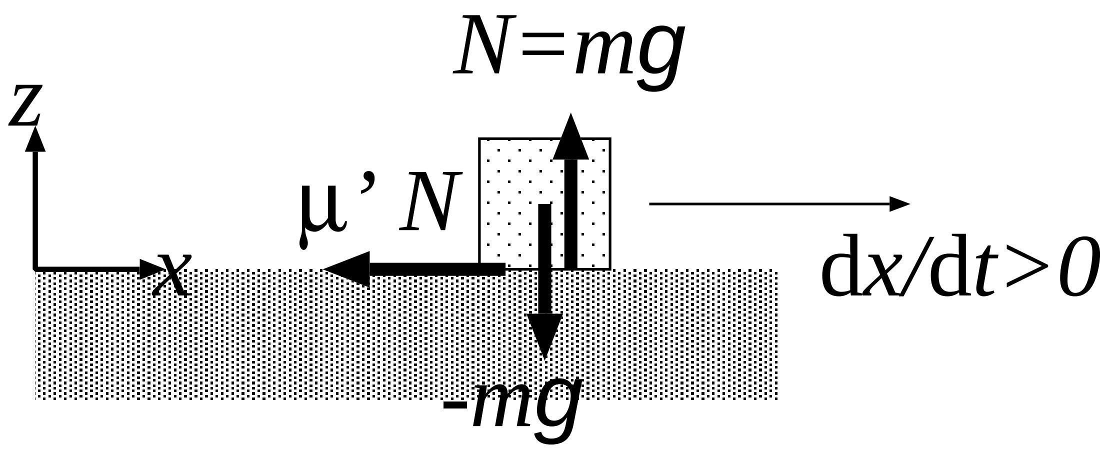
$$z(t) = 0. \tag{111}$$

5.3 粗い水平面上の運動 (動摩擦力あり)

戸田 p.36

なめらかでない (= 粗い) 面上を運動する物体は, だんだん速さが遅くなり, 最後は止まってしまう. これは, ニュートンの第 1 法則に反するように見えるが, 実は, 粗い面が物体に, すべりの摩擦の力 (動摩擦力) を及ぼしているためである.

動摩擦力は, 向きは速度の反対向き (速さを減らす), 大きさは, 垂直抗力 N の大きさに比例する. 比例定数 μ' は 動摩擦係数 とよばれ, 面の性質, 物体と面の接



する面積などによってきまる.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=\begin{cases}-\mu' N & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)>0\right)\\ 0 & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=0\right)\\ +\mu' N & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)<0\right)\end{cases} \tag{112}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t)=\boxed{42\qquad\qquad}\qquad\boxed{43\qquad\qquad} \tag{113}$$

例題 9

水平な粗い面の上をすべる質量 m の物体を考える. 水平方向に x 軸, 鉛直方向に z 軸を取る. 時刻 $t=0$ に初速度 $(v_x, v_z) = (v_0, 0), v_0 > 0$ $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{i}, v_0 > 0$ で水平に物体を発射したところ, 一直線上を運動した. 物体にはたらく力は重力と動摩擦力だけだった. ただし, 物体と面の間の動摩擦係数を μ' とする.

1. **水平, 鉛直それぞれの方向の運動方程式をたて, 初期条件をかこう.**
2. **時刻 $t=0$ 以降の物体の運動を求めよう.**
3. **物体が静止するまでに進む距離を求めよう.**

1. **垂直抗力の大きさを N として, 運動方程式は**

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\mu' N \tag{114}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + N \tag{115}$$

初期条件は, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$, $(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 0, z(0) = 0)$.

2. 積分すると,

$$\boxed{44} \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\mu' g \tag{116}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\mu' g t + C_1, \tag{117}$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}\mu' g t^2 + C_1 t + C_2. \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数}) \tag{118}$$

初期条件より, $\boxed{45}$ (119)

3. 物体が静止する時刻 T は $\boxed{46}$ から決まり, $T = \frac{v_0}{\mu' g}$.

$t = 0$ から $t = T$ の間に物体の進んだ距離は,

$|x(T) - x(0)| = \left| -\frac{1}{2}\mu' g (\frac{v_0}{\mu' g})^2 + v_0 \frac{v_0}{\mu' g} + C_2 - C_2 \right| = \frac{v_0^2}{2\mu' g}$.

5.4 粗い斜面に沿う運動 (動摩擦力あり)

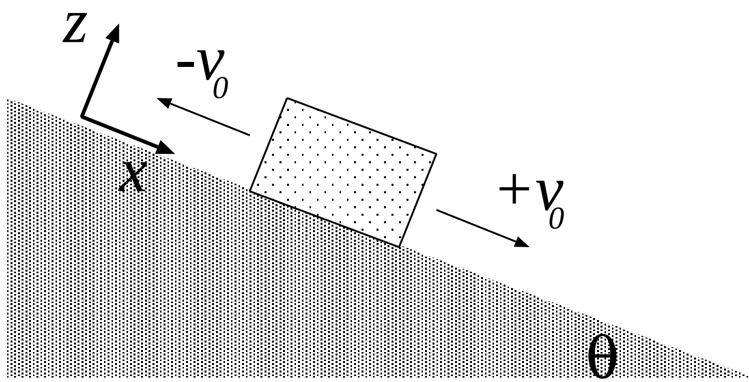
戸田 p.35

例題 10

角度 θ だけ傾いた粗い面の上をすべる質量 m の物体を考える．斜面と平行な方向に x 軸，それと垂直な方向に z 軸を取る．

時刻 $t = 0$ に原点から初速度の大きさ v_0 で物体を斜面にそって下向きに発射した．物体と面の間の動摩擦係数を μ' とする．

1. x, z それぞれの方向の運動方程式をたてよう．
2. 時刻 $t = 0$ 以降の物体の運動を求めよう．
3. 物体が斜面の途中で止まるための θ に対する条件を求めよう．

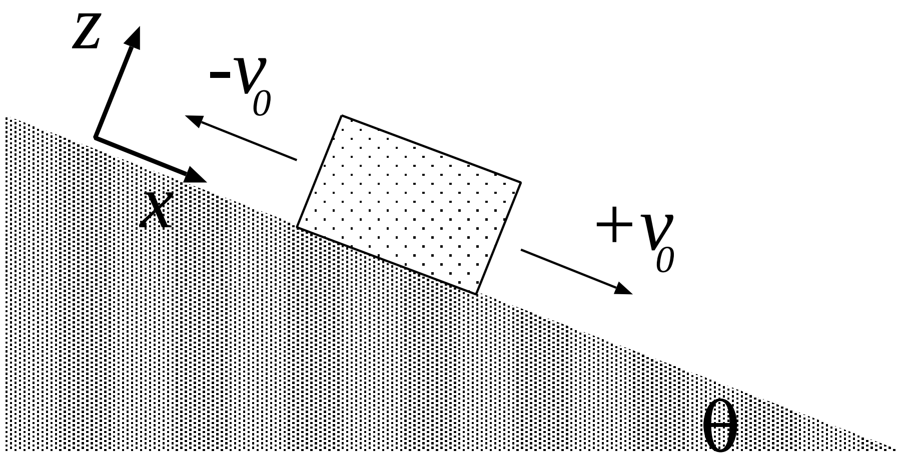


47

quiz 9

例題と同じ状況で，物体を，初速度の大きさ v_0 で斜面にそって上向きに発射した場合の運動を求めよう．物体が止まるまでに進んだ距離を求めよう．

Hint. **運動方程式の形は例題と同じではありません．**



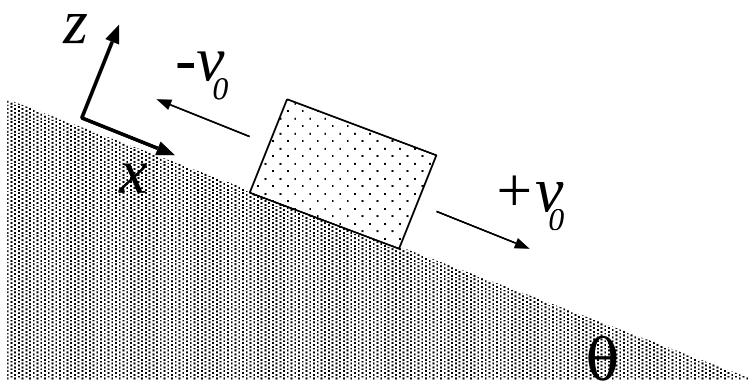
5.5 前回の quiz の略解

quiz 略解 9

垂直抗力の大きさを N として, 運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = +mg\sin\theta + \mu' N \qquad (120)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\cos\theta + N \qquad (121)$$



斜

初期条件は, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -v_0$.

面から離れない条件 $z=0$ と (121) から, $N=mg\cos\theta$. (120) に代入して解くと,

$$x(t)=\frac{1}{2}g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)t^2+C_1\cdot t+C_2. \tag{122}$$

初期条件より, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=C_1=-v_0$. 静止する時刻 $t=T$ は $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T)=0$ から

$$T=\frac{v_0}{g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)}. \tag{123}$$

と求まる.

$$|x(T)-x(0)|=\left|-\frac{v_0^2}{2g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)}\right|. \tag{124}$$

5.6 静止摩擦力

戸田 p.37

上では, 物体が動いている状況を考えた.

一方, 粗い面上に止まっている物体は, 水平方向に小さい力で押しても動き出さない. これは, 加えられた力 $\mathbf{F}$ と

大きさは $\boxed{48}$ 向きは $\boxed{49}$

の $\boxed{\text{静止摩擦力}}$ $-\mathbf{F}$ が働くためである. 静止摩擦力の大きさは, 加えられた力に応じて変化する.

静止摩擦力の大きさ $|\mathbf{F}|$ は, $\boxed{\text{最大でも}}$ μN である. ここで, N は垂直抗力. μ は $\boxed{\text{静止摩擦係数}}$ とよばれる比例係数. 最大静止摩擦力より大きな力を加えて初めて, 物体は動き始める. 以後は, 動摩擦力のみが働く.

静止摩擦係数と動摩擦係数の間には, $\boxed{50}$ という関係が成り立つ.

例題 11

静止摩擦係数 μ の斜面の傾きの角度を徐々に大きくしていったところ, 傾きの角度 θ で動き始めた. θ と μ の関係を求めよう.

51

quiz 10

静止摩擦係数 μ の水平面に, 質量 m の物体を置き, 水平方向に大きさ F の力を加えたところ, 動き出した.

力 F が加わっても動き出さないように, 物体の上に質量 M の重りを置く (接着して固定する) ことにする. 重りの質量は M はどれだけ以上である必要があるか.

6. ばねの力と単振動

今日の目標

- ばねの力を含む運動方程式が書ける.
- ばねの力を含む運動方程式が (特別な場合には) 解ける.

6.1 ばねの運動

戸田 3-3 和達 p.86

バネの先についた物体 (質量 m) の運動を考えよう.

自然長: 力が加わっていないときのバネの長さ

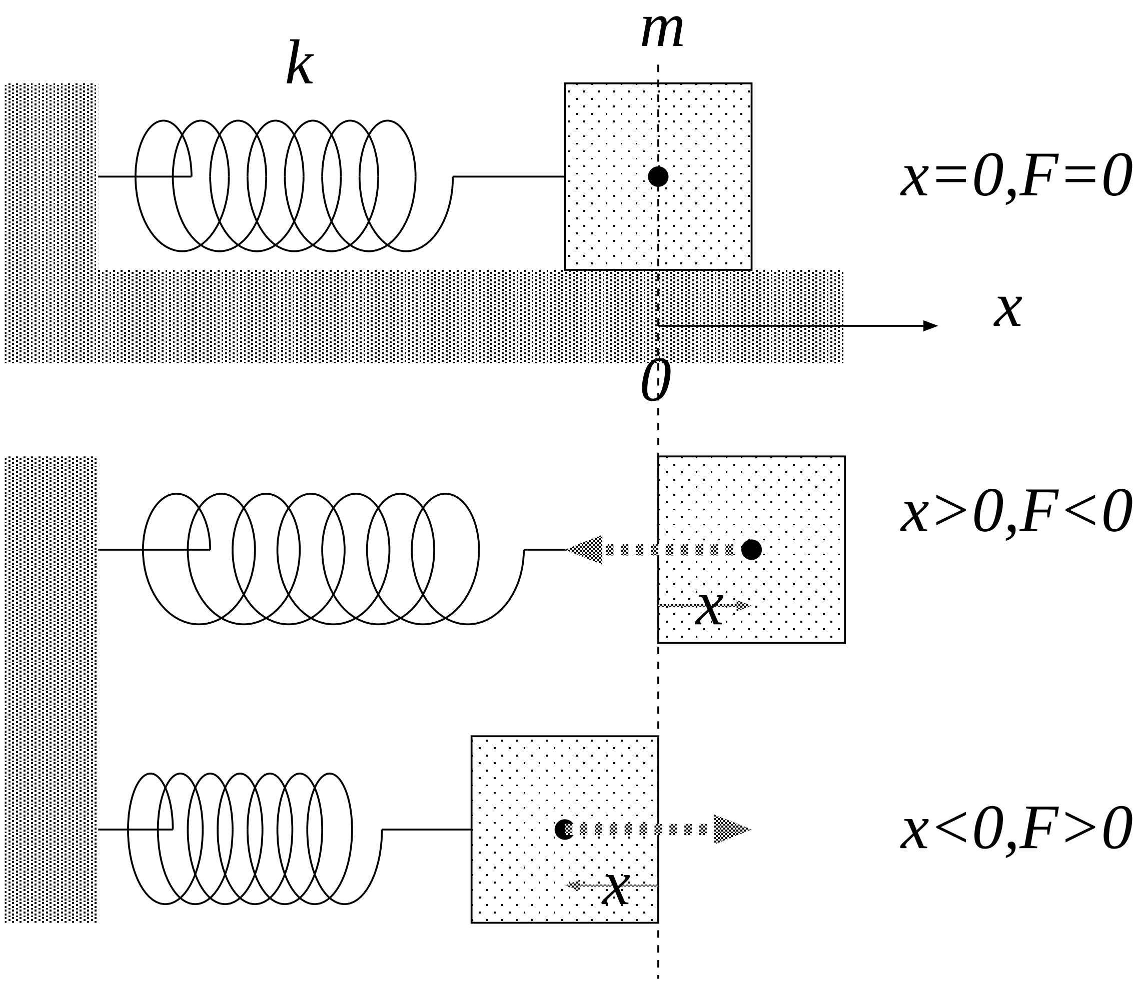
変位: $x(t) =$ (変化後のバネの長さ) $-$ (自然長)

バネの復元力 $F = -k \times x(t)$ (フックの法則)

$k > 0$: **バネ定数**. バネの強さを表す.

大きさは変位に比例. 変位を小さくするようにはたらく $\rightsquigarrow -kx(t)$

変位を小さくするようにはたらく (だからマイナス).



運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t). \tag{125}$$

すなわち

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega^2 x(t) = 0. \qquad (\omega = \sqrt{k/m}) \tag{126}$$

実は,

$$\boxed{\quad 52 \quad} \tag{127}$$

この方程式の解になっている (C_1, C_2 **は積分定数として**), **なぜなら**

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t) =& \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) \\
=& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t)) \\
=& - C_1 \omega^2 \cos(\omega t) - C_2 \omega^2 \sin(\omega t) \\
=& - \omega^2 (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) = -\omega^2 x(t).
\end{aligned} \tag{128}$$

実は, これ以外の解はない (**来年, 数理モデル基礎** I **で学びます**).

このような運動を **単振動 (調和振動)** **という**.

6.2 単振動 (調和振動)

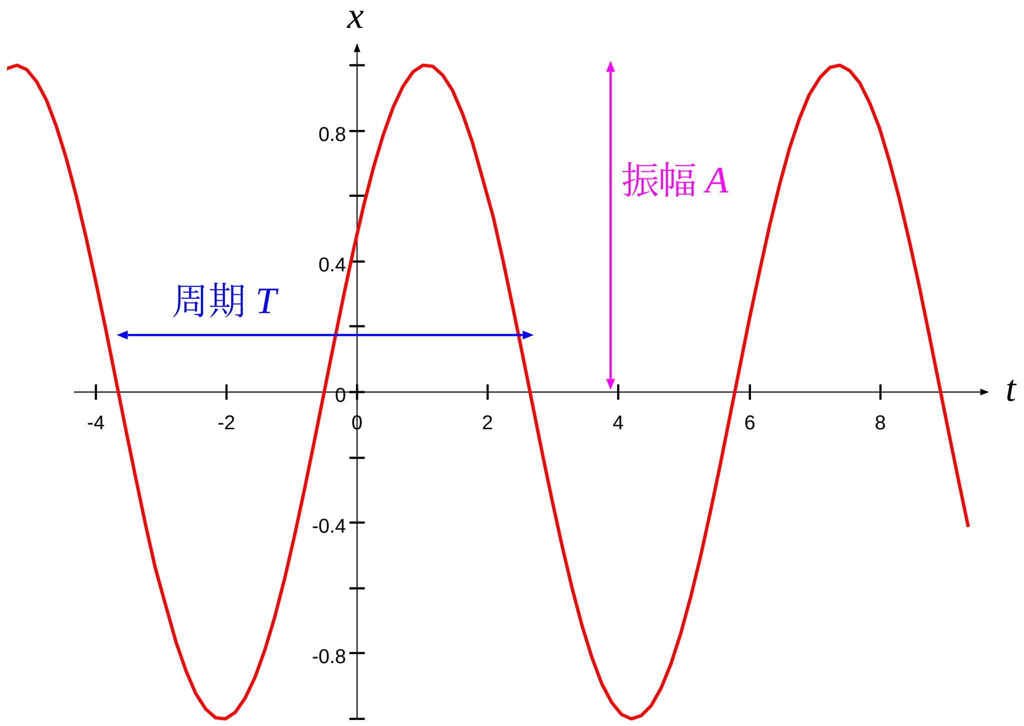
戸田 p.39

$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t = A\sin(\omega t + \theta). \qquad (129)$$

ただし, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \tan\theta = \frac{C_1}{C_2}$.

これって, **等速円運動** (→ **物理数学☆演習** I) **の** x (y) **方向の運動と同じ**.

→ i/V/EZ **アプリ** `http://hig3.net/`



記号	単位	名前	意味
A	[m]	53	$\lvert x(t)\rvert$ の最大値．等速円運動では 半径 R
ω	[rad/s]	角速度	単位時間あたりに回る角．
θ	[rad]	初期位相	時刻 $t=0$ における位相
$\omega t+\theta$	[rad]	位相	時刻 t における，x 軸からはかった角．
$T=2\pi/\omega$	[s]	周期	一周してもとの位置に来るまでの時間．$\omega T=2\pi$ からわかる．
$f=1/T$	[1/s]=[Hz]	振動数	単位時間に何周するかという数．単位 Hz(ヘルツ)

例題 12

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) = 0 \tag{130}$$

を考える. **積分定数を** C_1, C_2 **として**,

$$x(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) \tag{131}$$

が解であることを示し, **初期条件** $x(0) = 2$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ **から積分定数を定めよう**.

54

6.3 空気抵抗のもとでのばねの運動

和達 p.87

速度に比例する空気抵抗 $-c \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **もある場合を考えよう**.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{132}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{133}$$

このときの運動を **減衰振動** **という**.

一般に,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + a \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + b \cdot x(t) = 0. \quad (a,b \text{ は定数}) \tag{134}$$

というタイプの微分方程式を考えよう. 和達 p.82—84

例題 13

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 3 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 2 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{135}$$

55

ここで解答をちょっと中断して考える．この 2 つの解はどちらも初期条件を満たしていない．こまった．しかし，ここで超強力な定理．

定理． $x_1(t), x_2(t)$ が (134) の解であるとき，任意の定数 C_1, C_2 に対して，$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ も (134) の解になっている．

証明． $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ に対して，(134) の左辺が 0 になればよい．

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} =& \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(C_1x_1 + C_2x_2) + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C_1x_1 + C_2x_2) + b(C_1x_1 + C_2x_2) \\
=& C_1 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + bx_1\right) + C_2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + bx_2\right) \\
=& C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 \qquad (x_1, x_2 \text{ は解なので})
\end{aligned}
$$

この定理は，次の解答のようにいつでも使ってよい．

解答に戻ろう．

56

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \tag{140}$$

quiz 11

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) - 3 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = -1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 11. \tag{141}$$

quiz 略解 10

質量 M の重りをのせてぎりぎり動き出す場合を考えると,

$$0 = (m+M)\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F - \mu N, \tag{142}$$

$$0 = (m+M)\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = N - (m+M)g \tag{143}$$

よって, $F = \mu(m+M)g$ すなわち, $M = \frac{F}{\mu g} - m$ 以上である必要がある. 問題文の前半は, $\frac{F}{\mu g} - m > 0$ を保証している.

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

quiz 略解 11

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ という形の解があるか調べる．微分方程式に代入して，

$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t} + 2\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} - 3\mathrm{e}^{\lambda t} = (\lambda^2 + 2\lambda - 3)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0. \tag{144}$$

両辺を $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ で割って，

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0, \tag{145}$$

すなわち，$\lambda = 1, -3$ で，$\mathrm{e}^{t}, \mathrm{e}^{-3t}$ は解．(先週の定理より) C_1, C_2 を 任意定数としたとき，$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{t} + C_2 \mathrm{e}^{-3t}$ も解．このとき，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C_1 \mathrm{e}^{t} - 3C_2 \mathrm{e}^{-3t}$．初期条件より，

$$-1 = x(0) = C_1 \mathrm{e}^{0} + C_2 \mathrm{e}^{-3\cdot 0} = C_1 + C_2, \tag{146}$$

$$11 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = C_1 \mathrm{e}^{0} - 3C_2 \mathrm{e}^{-3\cdot 0} = C_1 - 3C_2. \tag{147}$$

解いて，$C_1 = 2, C_2 = -3$ より，$x(t) = 2\mathrm{e}^{t} - 3\mathrm{e}^{-3t}$.

6.4 他のうまくいく例

'$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいてみる', は超便利. これまで出てきた他の場合にも使っちゃおう.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t) \tag{148}$$

に $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ を代入してみる.

$$\begin{aligned} \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} &= 2\mathrm{e}^{\lambda t}. \\ (\lambda - 2)\mathrm{e}^{\lambda t} &= 0. \end{aligned}$$

任意の t について成立するためには, $\lambda = 2$ ととればいい.

$$x(t) = C\mathrm{e}^{2t} \qquad C \text{ は積分定数} \tag{149}$$

これは, 変数分離形で解いた場合と一致する.

6.5 だめな例

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t) - 1 \tag{150}$$

にも使っちゃおう. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ を代入してみる.

$$\begin{aligned} \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} =& 2\mathrm{e}^{\lambda t} - 1. \\ (\lambda - 2)\mathrm{e}^{\lambda t} =& -1. \end{aligned}$$

任意の t について成立するためには, $\lambda = 2$ ととればいいというわけにはいかない. λ が 定数にならない. t に依存してしまう. おかしい.

$\rightsquigarrow$ 解は $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とは書けない.

そういうときは, 別の方法, この場合には, 変数分離で解けばよい.

教訓 ‘$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいてみる’ はいつでも試してみていいけど, 途中でだめとわかることもある.

7. 単振動と複素数

7.1 虚数の指数関数

'$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$' **とおく**, **は超便利**. **単振動にも使っちゃおう**. **例題** 14

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) = 0, \qquad x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0 \tag{151}$$

は, $a = 0, b = 4$ **の場合**. **やってみよう**.

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいてみる**.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}$$

よって $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) = (\lambda^2 + 4)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0.$$

$\lambda^2 + 4 = 0 \rightsquigarrow \lambda = \pm 2i \quad (?????)$

虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ **は** $i^2=-1$ **を満たす．複素数** $x+iy$ **の** i.

知らん顔して計算すると,

$$x(t)=D_1\mathrm{e}^{2it}+D_2\mathrm{e}^{-2it}. \tag{152}$$

は解．初期条件より,

$$x(0)=D_1\mathrm{e}^{2i0}+D_2\mathrm{e}^{-2i0}=D_1+D_2=2. \tag{153}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=2iD_1\mathrm{e}^{2it}-2iD_2\mathrm{e}^{-2it}\text{だから}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=2iD_1\mathrm{e}^{2i0}-2iD_2\mathrm{e}^{-2i0}=2iD_1-2iD_2=0. \tag{154}$$

ここで $\mathrm{e}^0=1$ **を使った**.

連立方程式を解いて, $D_1=D_2=1$.

例題 14**の解は** $x(t) = 2\cos(2t)$ **だったはず**.

$$x(t) = 2\cos(2t) \stackrel{?}{=} \mathrm{e}^{2it} + \mathrm{e}^{-2it}. \tag{155}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -4\sin(2t) \stackrel{?}{=} 2i\mathrm{e}^{2it} - 2i\mathrm{e}^{-2it}. \tag{156}$$

したがって,

$$\frac{1}{2}\cdot(\text{上}) + \frac{1}{4i}\cdot(\text{下}) = \cos(2t) + i\sin(2t) \stackrel{?}{=} \mathrm{e}^{2it}. \tag{157}$$

$2t = \theta$ **とおくと**, **次のオイラーの公式になる**.

7.2 オイラーの公式

和達 p.10

定義. **実数** θ **に対して**

$$\boxed{57 \qquad\qquad\qquad\qquad} \cdots \boxed{\text{オイラーの公式}} \tag{158}$$

定義. **複素数** $z = a + i\theta$ (a **と** θ **は実数**) **に対して**,

$$\boxed{58 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{159}$$

3 **年で関数論を学ぶと**, **これで** ‘**よい**’ **というのが心から納得できます**.

参考: $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ **の証明**.

e^{x} **のテイラー級数で** $x = i\theta$ **とおくと**,

$$\mathrm{e}^{x} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \tag{160}$$

$$\mathrm{e}^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \cdots \tag{161}$$

一方, $\cos\theta, \sin\theta$ **の** Taylor **展開より**,

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots \tag{162}$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots \tag{163}$$

$$i\sin\theta = i\theta - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \cdots \tag{164}$$

したがって, $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

性質. **複素数** $z = x + iy, w = u + iv$ **に対して**,

$$\boxed{\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^{z} \times \mathrm{e}^{w}}$$

参考: **前半の証明**.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z+w} &= \mathrm{e}^{x+iy+u+iv} \\
&= \mathrm{e}^{(x+u)+i(y+v)} \\
&= \mathrm{e}^{x+u}\mathrm{e}^{i(y+v)} \\
&= \mathrm{e}^{x+u}(\cos(y+v) + i\sin(y+v)) \\
&= \cdots (\textbf{加法定理}) \cdots = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{u}\mathrm{e}^{iy}\mathrm{e}^{iv} \\
&= \mathrm{e}^{z} \times \mathrm{e}^{w}
\end{aligned} \tag{165}$$

性質. **複素数** $z = x + iy$, **整数** n **に対して**,

$$\boxed{(\mathrm{e}^{z})^{n} = \mathrm{e}^{zn}}$$

例題 14

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 9x(t) = 0. \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 3. \tag{166}$$

を, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ **は一般には複素数**) **とおくことによって解こう**.

59

60

7.3 複素平面と複素数の極表示

和達 p.7–11

i アプリ/V アプリ/EZ アプリ http://hig3.net

61

62

63

64

例題 15

$z = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i}$ とおく. z, z^2, z^{100}, $1/z$ の実部, 虚部を求めよう.

すみません. この例題は時間不足のため省略します. 似た例題を次回にやっています.

65

$z = x + iy$ は足し算が得意. $z = \mathrm{e}^{a+i\theta}$ は掛け算が得意.

quiz 12

$z_1 = -\sqrt{3} + i$ の絶対値と偏角を求めよう．$z_2 = \mathrm{e}^{2-\frac{\pi}{6}i}$ の実部と虚部を求めよう．

quiz 13

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 16x(t) = 0, \qquad x(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -8. \tag{171}$$

を, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ は一般には複素数) とおくことによって解こう．

冬のプチテストやります!

12 月 12 日 (金) 今回は微積分のテストとずれてます．このプチテストの成績は, 科目の成績 100 点のうち 25 点分にあたります．

特別講義 担当は四ツ谷先生です.

日時 12 月 9 日 (火)16:50–18:20

場所 1 号館 107 教室

講演題目 (最新の PC, 携帯電話, デジタルカメラの高密度実装技術を中心とした分かりやすく面白い話)

講演者 辻 昭久氏（ツジコー株式会社）

特別講義は, 卒業要件単位に数えられる科目です. 2003 年度履修要項版 p.268.

学外の講師を招いて年間 3 回程度 (各回 1 コマ) 行われる独立の講義に出席してレポートを提出し, 卒業までに計 6 回以上合格すると単位が認定されます. 学年に関係なく参加できます. 積極的に参加することをお勧めします.

履修登録は 4 年次前期に行います. したがって, 1 年次のみなさんは, 特に登録せずに講義に参加してください.

7.4 前回の quiz の略解

quiz 略解 12

$|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. **図を描いてみると**, $z_1 = 2(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi)$ **と書けるので**, $\arg z_1 = \frac{5}{6}\pi$.

$z_2 = \mathrm{e}^2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}i} = \mathrm{e}^2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) = \frac{\mathrm{e}^2}{2}(\sqrt{3} - i)$. **よって**,

$\mathrm{Re}\, z_2 = \frac{\mathrm{e}^2\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{Im}\, z_2 = -\frac{\mathrm{e}^2}{2}$.

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

quiz 略解 13

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 16x(t) = 0, \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 8. \tag{172}$$

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ **は定数**) **を代入してみると**,

$$(\lambda^2 + 16)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{173}$$

両辺を $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ **で割ると**,

$$(\lambda + 4i)(\lambda - 4i) = 0. \qquad (i^2 = -1) \tag{174}$$

解くと, $\lambda = \pm 4i$. **よって**, $x(t) = C_1\mathrm{e}^{+4it} + C_2\mathrm{e}^{-4it}$ **は解** (C_1, C_2 **は任意の定数**) **これを初期条件に代入すると**,

$$x(0) = 0 = C_1 + C_2 \tag{175}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -8 = 4iC_1 - 4iC_2 = 4i(C_1 - C_2) \tag{176}$$

この連立方程式を解くと $C_1 = +i, C_2 = -i$. 初期条件を満たす解は

$$
\begin{aligned}
x(t) &= + i\mathrm{e}^{4it} - i\mathrm{e}^{-4it} \\
&= + i(\cos 4t + i \sin 4t) - i(\cos(-4t) + i \sin(-4t)) \\
&= + i(\cos 4t + i \sin 4t) - i(\cos 4t - i \sin 4t) \\
&= i2i \sin 4t = -2 \sin 4t.
\end{aligned}
\tag{177}
$$

これは微分方程式と初期条件を確かに満たしている.

楽な計算法

$$\mathrm{e}^{+i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{178}$$

$$\mathrm{e}^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \tag{179}$$

$\frac{1}{2}$(上) + $\frac{1}{2}$(下) より　$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \tag{180}$$

$\frac{1}{2i}$(上) − $\frac{1}{2i}$(下) より　$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i} \tag{181}$$

これを使うと，上の解答の第 1 行でいきなり，

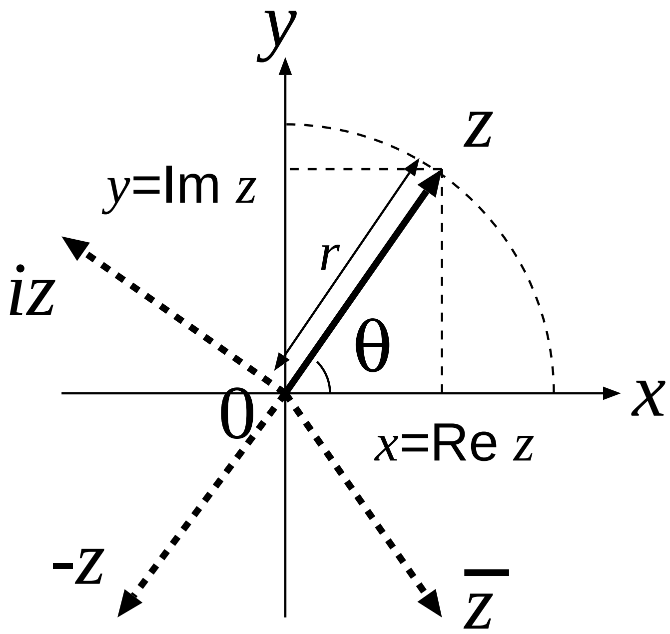
$$x(t) = +i\mathrm{e}^{4it} - i\mathrm{e}^{-4it} = 2i \times i \times \frac{\mathrm{e}^{4it} - \mathrm{e}^{-4it}}{2i} = -2\sin 4t \tag{182}$$

とわかる．おぼえる価値あるよ．

7.5 複素数のまとめ

x, y, r, θ **は実数**, $r \geq 0$.

	実/虚部表示	**極表示**
複素数 z	$= x + iy$	$= re^{i\theta}$
実部 $\mathrm{Re}\, z$	$= x$	$= r\cos\theta$
虚部 $\mathrm{Im}\, z$	$= y$	$= r\sin\theta$
絶対値 $\lvert z\rvert$	$= \sqrt{x^2 + y^2}$	$= r (\geq 0)$
$\boxed{\textbf{偏角}}$ $\arg z$	$=$	θ
		$(\tan\theta = \frac{y}{x})$
複素共役 $\bar{z}$	$= x - iy$	$= re^{-i\theta}$



複素平面

横軸に実部 x, **縦軸に虚部** y **を描いたもの**

いくつかの公式

(どうせ定義に戻ればすぐに導けるけど, おぼえると楽かも)

$z = x + iy = r\mathrm{e}^{i\theta}$, $(x, y, r, \theta$ **は実数**.)

e^z の性質.

$$\mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{2\pi i} = 1, \mathrm{e}^{\pi i} = -1. \tag{183}$$

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x, \text{特に } |\mathrm{e}^{iy}| = 1. \tag{184}$$

$$\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\bar{z}}, \text{特に } \overline{\mathrm{e}^{iy}} = \mathrm{e}^{-iy}. \tag{185}$$

微分積分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{zt} = z\mathrm{e}^{zt}. \tag{186}$$

$$\int \mathrm{e}^{zt}\mathrm{d}t = \frac{1}{z}\mathrm{e}^{zt} + C. \tag{187}$$

オイラーの公式を逆に解いたもの

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}, \tag{188}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}, \tag{189}$$

複素共役, -1 倍, 逆数.

$$\bar{z} = \overline{r\mathrm{e}^{i\theta}} = r\mathrm{e}^{-i\theta}, \tag{190}$$

$$-z = -r(\mathrm{e}^{i\theta}) = r\mathrm{e}^{i(\theta+\pi)}, \tag{191}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta} \tag{192}$$

例題 16

$z = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\pi i}$, $w = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{12}\pi i}$ とおく. z, z^{100}, $1/z$, zw の実部, 虚部を求めよう.

66

8. 単振動と減衰振動

8.1 単振動

例題 17

質量 $m=2$, ばね定数 $k=8$ のばねがあり, 自然長の位置を x 軸の原点 $x=0$, のびる方向を x 軸の正の向きとする．時刻 $t=0$ に, 自然長から $x(0)=4$ だけのばし, 速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=8$ で発射したとする．運動を求め, 横軸 t 縦軸 x でグラフを描こう．単振動の角速度と振幅を求めよう．最初に自然長に戻る時刻を求めよう．

67

68

8.2 特性方程式と解の分類

$$a \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + c \cdot x(t) = 0. \quad (b,c \text{ は定数}) \tag{193}$$

という微分方程式は, a, b, c の値に応じて異なるタイプの解を持つ.

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて代入.

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{194}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{195}$$

これは λ をきめる 2 次方程式.　$\cdots\cdots$ $\boxed{69\qquad\qquad}$ という.

$$\boxed{70\qquad} \quad D = b^2 - 4ac. \tag{196}$$

解は, D の値によって分類される.

$D > 0$ のとき 和達 p.83(i)

2 実根.

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\alpha t} + C_2 \mathrm{e}^{\beta t}. \qquad (\alpha, \beta \text{は実数}) \tag{197}$$

というタイプの解. 前にも出てきた.

$D < 0$ のとき 和達 p.83(ii)

互いに複素共役な 2 複素根. $\lambda = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2} = \mu \pm i\omega$.

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{(\mu + i\omega)t} + C_2 \mathrm{e}^{(\mu - i\omega)t} \qquad (\mu, \omega \text{は実数}) \tag{198}$$

下で例で見ます.

なお, 単振動は $\mu = 0$ となる特別の場合.

$D = 0$ のとき 和達 p.84(iii)

重根. $D > 0$ と $D < 0$ の境い目. 来年数理モデル基礎 I でやります.

例題 18

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 5 \cdot x(t) = 0, \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -1. \qquad (199)$$

を解いて, $x(t)$ **のグラフを描こう**.

71

72

quiz 14

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 5x(t) = 0, \quad x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -6 \tag{204}$$

を解いて, $x(t)$ **のグラフを描こう**.

冬のプチテストやります! 12 月 12 日 (金). このプチテストの成績は, 科目の成績 100 点のうち 25 点分にあたります.

補講やります! すみません. 12 月 25 日 (木) 1 講時. 1-107 です. 曜日が違うことに注意してね.

全学アンケートやります! 授業後半の 15 分程度ご協力ください. このアンケートは成績には関係ありません. 公表されるのは個人が特定できないデータのみです.

Q13 個別問題 1 の問と選択肢 物理数学☆演習 II の演習部分について, あなたの意見と一致するものをマークしてください.

1. 演習はなくしたほうがよい.
2. 演習の時間を短くしたほうがよい.
3. 講義と演習の時間の現在の比率は適切である.
4. 演習の時間を長くしたほうがよい.

5. 微積分, 線形代数のように, 1 コマの演習があることが望ましい.

$\boxed{\text{Q14 個別問題 2 の問と選択肢}}$ 物理数学☆演習 II の Web ページについて教えてください. 該当するもののうち, もっとも番号の大きいものをマークしてください.

1. Web ページがあることを知らなかった.
2. 存在は知っているが, 見に行ったことがない.
3. 見に行って, プリントを印刷した.
4. 見に行って, アニメーションを見た.
5. 見に行って, i アプリ/Java アプリ/EZ アプリをダウンロードした.

$\boxed{\text{Q15 個別問題 3 の問と選択肢}}$ 主に使っている携帯電話を教えてください.

1. DoCoMo の 503i 以降 または FOMA.
2. Vodafone または J-Phone

3. au の A3000 番台, A5000 番台.
4. DoCoMo の 201i 番台, 251i 番台, au の 1000 番台, その他 Java アプリケーションの動作しない携帯電話, PHS.
5. 携帯電話は使っていない.

樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2003/12/21 Sun 19:04 hig"

プチテスト解答の訂正

1.2 です．ごめんなさい．最終的な答は同じです．

誤　$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = t^2 \int \mathrm{d}t + C$,　　正　$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t + C$

8.3 前回の quiz の略解

quiz 略解 14

$$
\begin{aligned}
x(t) =&(1+i)\mathrm{e}^{(-2+i)t} + (1-i)\mathrm{e}^{(-2-i)t} \\
=&2\mathrm{e}^{-2t}(\cos t - \sin t) = -2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-2t}\sin(t-\tfrac{\pi}{4})
\end{aligned}
\tag{205}
$$

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

今日の目標

- 音を立てずにドアが速く閉まるようにばねを調節できる.
- 鉛直方向のばねも単振動することがわかる.

8.4 過減衰と減衰振動

和達 p.87,88

ばね定数 k のばねの力 $-kx(t)$ と, 速度に比例する空気抵抗 $-\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とがある場合を考えよう $(k, \gamma > 0)$

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \cdot x(t) - \gamma \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{206}$$

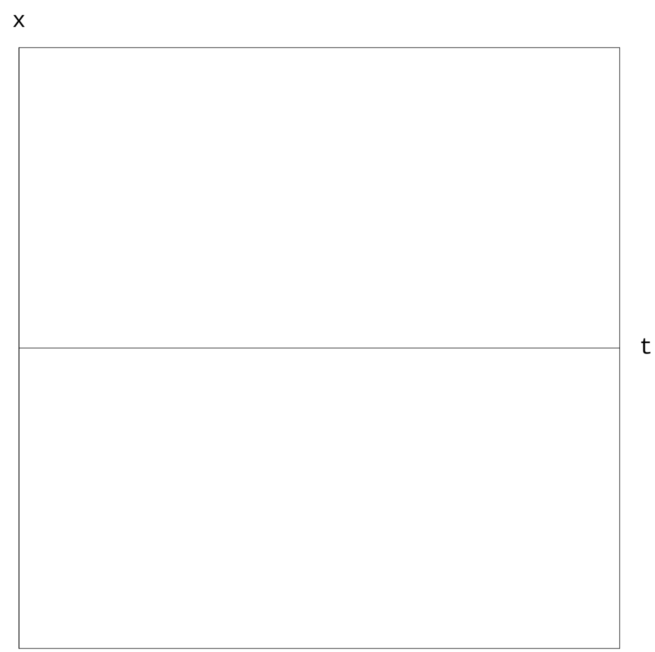
$$\iff m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \gamma \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + k \cdot x(t) = 0. \tag{207}$$

一般に,

$$a \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + c \cdot x(t) = 0. \quad (a, b \text{ は定数}) \tag{208}$$

というタイプの微分方程式を解くのに, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおくと λ に対する 特性方程式 $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ が得られ, この 2 次方程式の判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号により, 微分方程式の解のタイプも変わるのだった.

$D > 0$ のとき $D = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{mk} < \gamma$.　73



抵抗 γ が大きいとき. アニメ

2 実根. $\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - mk}}{2} =$

$\alpha, \beta < 0$.

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\alpha t} + C_2 \mathrm{e}^{\beta t}. \tag{209}$$

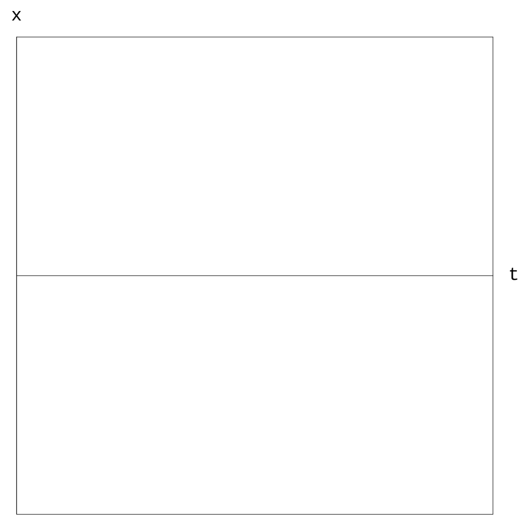
$D<0$ のとき $D=b^2-4ac<0 \Leftrightarrow \gamma<2\sqrt{mk}$ 74

抵抗が小さいとき．アニメ

互いに複素共役な 2 複素根.

$$\lambda=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2}=\frac{-\gamma\pm i\sqrt{mk-\gamma^2}}{2}=\mu\pm i\omega,\mu<0.$$

$$\begin{aligned} x(t)=&C_1\mathrm{e}^{(\mu+i\omega)t}+C_2\mathrm{e}^{(\mu-i\omega)t}=\mathrm{e}^{\mu t}(C_1\mathrm{e}^{i\omega t}+C_2\mathrm{e}^{-i\omega t}) \\ =&\mathrm{e}^{\mu t}((C_1+C_2)\cos\omega t+i(C_1-C_2)\sin\omega t) \\ =&\mathrm{e}^{\mu t}(D_1\cos\omega t+D_2\sin\omega t) \end{aligned} \tag{210}$$



単振動 $\Longleftrightarrow \gamma=0 \Longleftrightarrow D=-mk<0,\mu=0.$

減衰振動の中の特別な場合 (減衰しない場合)

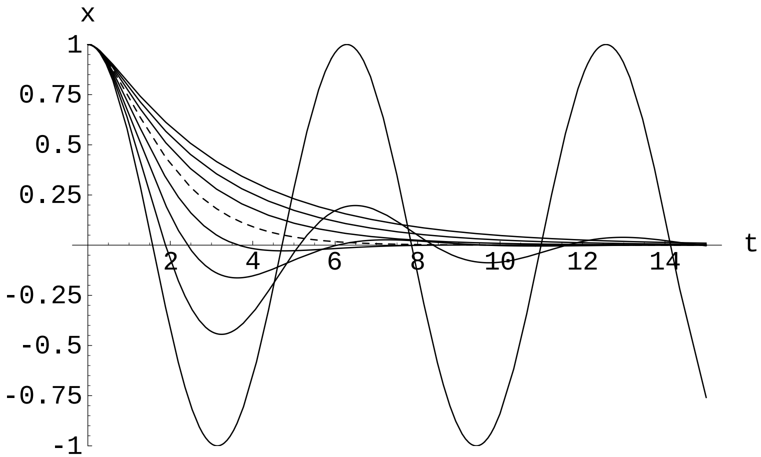
$D=0$ のとき

$$D = b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow \gamma = 2\sqrt{mk}$$

重根．過減衰と減衰振動の境い目．

来年数理モデル基礎 I でやります．臨界制動といいます．

全部をまとめて描いた図

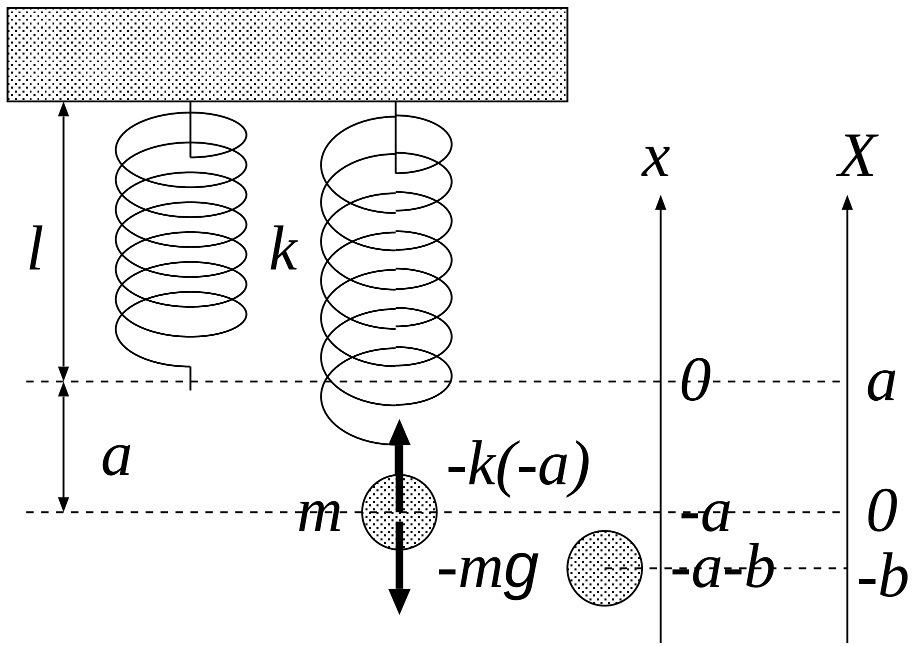


9. 単振動の応用

自然長 l, ばね定数 k, 質量の無視できるばねを重力 (重力加速度 g) のもとで天井から鉛直方向につるす.

質量 $=0$ なので, ばねの下端は, 天井から自然長だけ離れる. 下端を原点として, 上向きを正に x 座標をとる.

ここで, 質量 m の物体をばねに取りつける.



物体の運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - mg. \tag{211}$$

ばねがのびて物体が静止したときの位置は?

ばねが a **だけのびたととすると, 物体の位置は** $x = -a$. **このときに, 静止している, つまり加速度が** 0 **だから,**

75

(212)

さらに b **だけ引っ張って静かに離したときの運動は?**

$$\textbf{運動方程式}\quad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - mg. \tag{213}$$

$$\textbf{初期条件}\quad x(0) = -a - b,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{214}$$

単振動だから, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいて** (213) **の解を探してみよう** (?)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}x(t) + g = 0. \tag{215}$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right)\mathrm{e}^{\lambda t} + g = 0. \tag{216}$$

$\boxed{\lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i \text{ ではない!}}$

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **という形の解はない**.

うまい方法

x **座標の原点を**, $x=-a$ **に変更したものを考える. この座標を** X **とかくことにしよう**: $x=X-a$.

時刻 t **での物体の位置を** $X(t)$ **と書くと**,

$$\textbf{運動方程式}\quad m\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t)=\boxed{\quad 76 \quad}. \tag{217}$$

$$\textbf{初期条件}\quad X(0)-a=-a-b,\quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(0)=0. \tag{218}$$

すなわち,

$$m\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t)=-k\left(X(t)-\frac{mg}{k}\right)-mg. \tag{219}$$

$$\textbf{整理して}\quad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{k}{m}X(t)=0. \tag{220}$$

$$X(0)=-b,\quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(0)=0. \tag{221}$$

この $X(t)$ **について** $X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいてみると**,

$$\left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \qquad \textbf{よって} \tag{222}$$

77

よって,

$$X(t) = C_1\mathrm{e}^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2\mathrm{e}^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \tag{223}$$

は解. 初期条件より, $C_1 = C_2 = -b/2$. **よって**,

$$X(t) = -\frac{b}{2}\left(\mathrm{e}^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \mathrm{e}^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right) = -b\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{224}$$

$x(t)$ **の方で書くと**,

$$x(t) = X(t) - a = -a - b\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{225}$$

きょうの教訓: うまい座標系 (原点) をとるとうまくいく

もう少し堅実な人のための方法

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}x(t) + g = 0 \tag{226}$$

元凶は左辺の g. これを, $x(t)$ に取り込んで,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right) = 0 \tag{227}$$

として, $\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right)$ をかたまりだと思おう.

第 1 項 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ は, このかたまりでかけてない. しかし, 運良く

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{228}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) \tag{229}$$

なので,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x(t)+\frac{mg}{k}\right)+\frac{k}{m}\left(x(t)+\frac{mg}{k}\right)=0 \tag{230}$$

とかける. そこで, かたまりを

$$X(t)=\left(x(t)+\frac{mg}{k}\right)=x(t)+a \tag{231}$$

とおいて,

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{k}{m}X(t)=0 \tag{232}$$

を解けばよい.

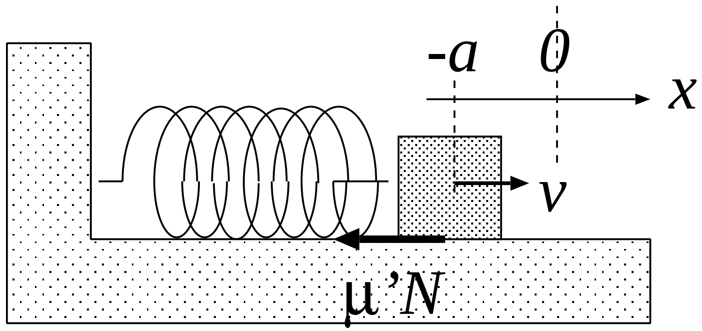
例題 19

質量 m の物体が，ばね定数 k のばねにつながれて，水平面上に置かれている．重力加速度を g とする．

面と物体の間の動摩擦係数を μ' とする．面と物体の間の静止摩擦力は考えない．

ばねを自然長から $a(>0)$ だけ押し縮めて静かに手を離した．自然長の位置を原点，右向きに正に x 軸をとる．

ばねがのびて物体が一瞬静止するまでの運動を求めよう．



78

79

quiz 15

次の微分方程式を解こう．積分定数は決定しなくてよい．

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) - 12 = 0 \tag{233}$$

quiz 16

質量 $m = 1$ の物体が，ばね定数 $k = 4$ のばねにつながれ，水平面上に置かれている．物体は速さに比例する空気抵抗 (比例定数 $\gamma = 5$) を受ける．

壁の位置を $x = 0$ とするような x 座標をとると，ばねが自然長のときの物体の位置は $x = 3$ だった．

1. **物体の位置 $x(t)$ についての運動方程式をたてよう．**
2. **時刻 $t = 0$ に，物体を $x = \frac{9}{4}$ の位置において，静かに手を放した．物体の運動 $x(t)$ を求めよう．**

補講あります! 2003/12/25(**木**) 1 **講時．冬のプチテスト返却はこのころになります．**

ファイナルトライアルあります! 2004/01/23(**金**) 1 **講時．これは科目の成績** 50 **点分に相当します．**

樋口さぶろお[a] 更新 `Time-stamp: "2004/01/09 Fri 11:17 hig"`

ファイナルトライアル

2003/01/23(金)1 講時. 科目の成績は 100 点= quiz 10 + 秋のプチテスト 15 + 冬のプチテスト 25 + ファイナルトライアル 50.

9.1 前回の quiz の略解

quiz 略解 15

$X(t) = x(t) - 3$ とおくと,

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4X(t) = 0 \tag{234}$$

$X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおくと, $\lambda = \pm 2i$ となり,

$$X(t) = C_1 \mathrm{e}^{2it} + C_2 \mathrm{e}^{-2it} = D_1 \cos(2t) + D_2 \sin(2t). \tag{235}$$

$$x(t) = X(t) + 3 = D_1 \cos(2t) + D_2 \sin(2t) + 3. \tag{236}$$

これは (原点のずれた) 単振動.

quiz 略解 16

運動方程式は

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k(x(t) - 3) - \gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{237}$$

すなわち,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 5 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 4x(t) - 12 = 0. \tag{238}$$

定数項 -12 を吸収するために $X(t) = x(t) - 3$ とおくと,

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) + 5 \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t) + 4X(t) = 0 \tag{239}$$

$X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおくと, $\lambda = -1, -4$ となり,

$$X(t) = C_1 \mathrm{e}^{-4t} + C_2 \mathrm{e}^{-t}. \quad x(t) = X(t) + 3 = C_1 \mathrm{e}^{-4t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + 3. \tag{240}$$

初期条件より $C_1 = 1/4, C_2 = -1$ で,

$$x(t) = \tfrac{1}{4} \mathrm{e}^{-4t} - \mathrm{e}^{-t} + 3. \tag{241}$$

これは (原点のずれた) 過減衰.

10. エネルギー保存則と位置エネルギー

戸田 3-4

10.1 エネルギー保存の例

戸田 p.46,47

例題 20

ばねの運動を表わす運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) \tag{242}$$

の, **初期条件** $x(0) = A$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = \sqrt{\frac{k}{m}}B$ **のもとでの解は**,

$$x(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \tag{243}$$

である. このことを確かめ, **この解** $x(t)$ **に対して**, **量**

$$\frac{1}{2}m\left(\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}k\cdot(x(t))^2 \tag{244}$$

を求めよう.

80

10.2 力学的エネルギーの保存 (1 次元)

戸田 p.43-45

位置 x だけで決まる力 $F(x)$ を受けて 1 次元の運動をする, 質量 m の質点を考えよう.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F(x(t)). \tag{245}$$

あてはまる例 ばねの力.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t). \quad \text{すなわち} \quad F(x) = -k \cdot x. \tag{246}$$

そうでない例 空気抵抗を受けるばね. 力 F は, x と v の関数.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t) - \gamma \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{247}$$

時間 t に ($x(t)$ を通さず) 依存する力 $F(x,t)$ もそうでない例. たとえば時間的にばね定数が変化するばね $F(x,t) = -k(t)x$.

(245) で $v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおくと,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)=F(x(t)). \tag{248}$$

誰かが思いついた超絶技巧. 両辺に $v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ をかける.

$$mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)=F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{249}$$

$$\int mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t=\int F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \tag{250}$$

左辺で変数変換 $t\to v(t)$, 右辺で変数変換 $t\to x(t)$.

$$\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \text{ より, 左辺}=\int mv\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv^2+C_1. \tag{251}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \text{ より, 右辺}=\int F(x)\mathrm{d}x. \tag{252}$$

関数 $U(x)$ **を, 力** $F(x)$ **から**

$$\boxed{U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x'} \tag{253}$$

で定義する. このとき,

$$\frac{1}{2}mv^2 + C_1 = -U(x) + U(0) + C_2. \tag{254}$$

すなわち $$\boxed{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x(t)) = E.(\textbf{一定})} \tag{255}$$

が示される.

第 1 **項** $\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2$ **を質点の** $\boxed{81\qquad\qquad}$ **という.**

(253) **で定義される第** 2 **項** $U(x)$ **を質点の** $\boxed{82\qquad\qquad}$,

または **ポテンシャル (エネルギー)** **という.**

両者の和 E **は** **力学的エネルギー**. **単位**:kg·m/s^2·m=N·m=J(**ジュール**)

式 (255) は, 力 $F(x)$ のもとで 1 次元を運動する質点の力学的エネルギー E は一定で変化しないことをいっている．これを,

力学的エネルギーは $\boxed{83}$, 力学的エネルギーは $\boxed{84}$ である, 力学的エネルギーは不変である

などという．例題 20 で計算した一定な量は力学的エネルギーである．一般に, 力 F が, ある関数 U を用いて,

$$\boxed{F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x)} \qquad (256)$$

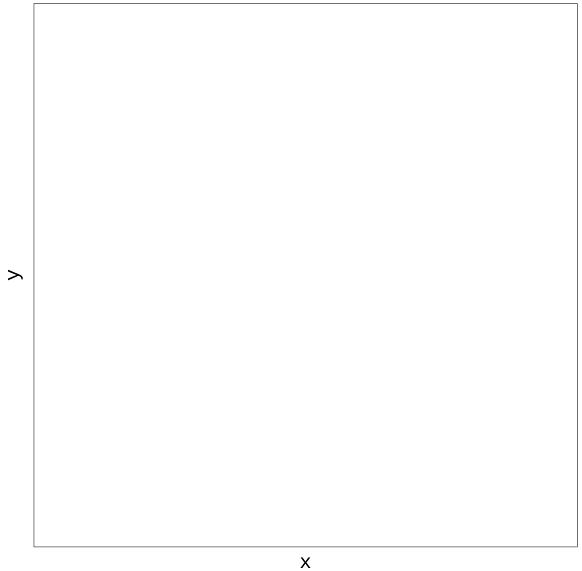
と書けるとき, そのような力は 保存的 であるといい, 関数 $U(x)$ のことをポテンシャルまたは位置エネルギーと呼ぶ.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} \\ U(x) \qquad\qquad F(x) \\ \xleftarrow{-\int \mathrm{d}x} \end{array}$$

$\boxed{\text{例}}$ 重力のもとでの鉛直方向の運動. 戸田 p.46

高さを x とかく. $F(x) = -mg$.

$$U(x) = -\int_0^x F(x')\,\mathrm{d}x' = -\int_0^x -mg\,\mathrm{d}x' = mgx.$$

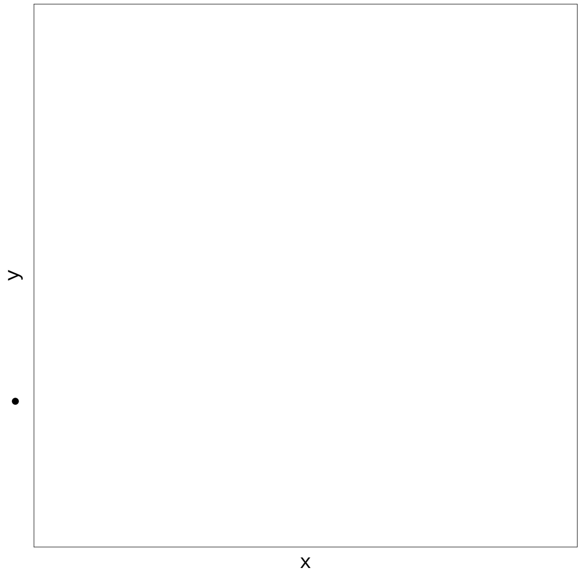


保存則　$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + mgx(t) = E(\textbf{一定})$.

$\boxed{\text{例}}$ ばねの力のもとでの運動. 戸田 p.47

自然長からの変位を x. $F(x) = -kx$.

$$U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = -\int_0^x (-kx')\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}kx^2.$$



保存則　$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}k(x(t))^2 = E(\textbf{一定})$.

例題 21

ポテンシャルが $U(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$ であるとき, 質点が受ける力 $F(x)$ を求めよう.

85

例題 22

ばね定数 k のばねに取りつけられた, 質量 m の質点を考える. 自然長の位置を原点として, 時刻 t における位置を $x(t)$ とする.

$$x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = V \tag{257}$$

である場合, ばねののびの最大値を求めよう.

86

$U(x)$ には, 定数の不定性がある

$U(x)$ の定義 (253) では, 下端を $x=0$ としたが, 任意の $x=x_0$ としてよい. このとき, $U(x)$ は定数だけ変化する.

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{new}}(x) &= -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' \\
&= -\int_{0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' - \int_{x_0}^{0} F(x')\mathrm{d}x' \\
&= U(x) + (\text{定数})
\end{aligned}
\tag{258}
$$

つまり $U(x)+C$ が位置エネルギーと思ってもよい.

どうせ微分して力 $F(x)$ を求めたら変わんないしー.

quiz 17

1 次元を運動する質点にはたらく力が $F(x) = -x - x^3$ であるとき, ポテンシャル $U(x)$ を求めよう.

quiz 18

ばね定数 k のばねに取りつけられた, 質量 m の質点を考える. 自然長から $x_0(>0)$ だけ引きのばして, 静かに手を放した. 自然長に戻ったときの速さを, 力学的エネルギー保存則を用いて求めよう.

10.3 前回の quiz の略解

quiz 略解 17

ポテンシャル $U(x)$ は,

$$U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = \int_0^x (x' + {x'}^3)\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4. \tag{259}$$

x' は積分変数で, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ ではありません.

quiz 略解 18

変位を x, 速度を $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ とすると位置エネルギーは $\frac{1}{2}kx^2$ なので, 力学

的エネルギー保存則は,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad (\text{一定}) \tag{260}$$

静かに $(v = 0)$ 手を離した瞬間に, この式は

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = E. \tag{261}$$

自然長に戻った $(x = 0)$ 瞬間の速度を v_0 とすると, この式は

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k \cdot 0^2 = E \tag{262}$$

定数 E を消去すると,

$$v_0 = \pm x_0\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{263}$$

最初にもとの長さに戻ったときには $v_0 < 0$ なので, $v_0 = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$. 速さは $|v_0| = x_0\sqrt{\frac{k}{m}}(> 0)$.

力学的エネルギー保存則を使わない解き方

運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t). \tag{264}$$

を解く. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいて** $\cdots$ (**中略**)$\cdots$ C_1, C_2 **を積分定数として**,

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{i\sqrt{k/m}\,t} + C_2\mathrm{e}^{-i\sqrt{k/m}\,t}. \tag{265}$$

初期条件 $x(0) = x_0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ **より**,

$$x(t) = \frac{x_0}{2}\mathrm{e}^{i\sqrt{k/m}\,t} + \frac{x_0}{2}\mathrm{e}^{-i\sqrt{k/m}\,t} = x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t. \tag{266}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t. \tag{267}$$

最初に $x(t) = 0$ **となる時刻は** $\sqrt{\frac{k}{m}}t = \frac{\pi}{2}$ **より**, $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\right) = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{\pi}{2} = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}.\text{速さは}\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\right)\right| = x_0\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{268}$$

10.4 仕事とポテンシャル

$U(x)$ は'仕事' 戸田 p.64

質点が, 一定の力 F をうけて, x_0 から x_1 まで動いたとする. このとき,

$$\boxed{W = F \times (x_1 - x_0) = F \times \Delta x} \tag{269}$$

を, 力 F のした 仕事 という.

力の向きと移動方向が同じなら $W > 0$, 逆なら $W < 0$.

W が大きいほど, 力 (出してる人) は仕事が多くてたいへん, という感じ.
力が x の関数 $F(x)$ である場合には

$$W = \sum_i F(x_i)\Delta x \rightsquigarrow W = \int_{x_0}^{x_1} F(x')\mathrm{d}x' \tag{270}$$

となる. 単位:=N·m=J(ジュール) でエネルギーと同じ.

位置エネルギーと仕事の関係

力 $F(x)$ に抗して, $(-F+(\text{ちょっとの力}))$ で質点を x_0 から x_1 まで運ぶときにする仕事は,

$$W=\int_{x_0}^{x_1}-F(x')\mathrm{d}x'=-\int_0^{x_1}F(x')\mathrm{d}x'+\int_0^{x_0}F(x')\mathrm{d}x'=U(x_1)-U(x_0). \tag{271}$$

つまり, 位置エネルギーの差だけの仕事が必要.

また, 位置エネルギー

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' = \int_{x}^{x_0} F(x')\mathrm{d}x' \qquad (272)$$

は, $\boxed{\text{仕事}}$ という言葉を使うと, 次のように解釈できる.

- 力 F に抗して, 自分で $(-F + (\text{ちょっとの力}))$ を使って x_0 から x まで運ぶとする. そのときにしなければならない仕事が $U(x)$. なので, 位置エネルギーが大きい場所は, 行くのにたくさん仕事が必要.
- 力 $F(x)$ をうけて x から x_0 まで移動するときに, 力がする仕事が $U(x)$. 逆に, すでに x にある質点には $U(x)$ だけの仕事をする能力 ($\rightsquigarrow$ ポテンシャルエネルギー) がある.

quiz 19

1 次元を運動する質点にはたらく力が $F(x) = -x - x^3$ であるとき, ポテンシャル $U(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ である. この力に抗して, $-F(x)$ の力で質量 m の質点を $x = -1$ から $x = 2$ に運ぶのに要する仕事を求めよう.

10.5 エネルギー保存則の使い方の練習

例題 23

重力のもとで (重力加速度 g), 質量 m の質点を, 地表から速さ v_0 で鉛直上向きに打ち出した. 最高点の (地表から測った) 高さを, 力学的エネルギー保存則を用いて求めよう.

87

quiz 20

重力のもとで (重力加速度 g), 質量 m の質点を, 高さ h_0 の点から静かに落下させた. 高さ h_1 の点まで落下したときの速さを力学的エネルギー保存則を用いて求めよう.

10.6 位置エネルギーを用いた運動の解析

戸田 p.52

力学的エネルギー E を持つ物体の運動は,

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x) = E. \tag{273}$$

を満たす (力学的エネルギー保存則). 変形して,

$$E - U(x) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 \geq 0. \tag{274}$$

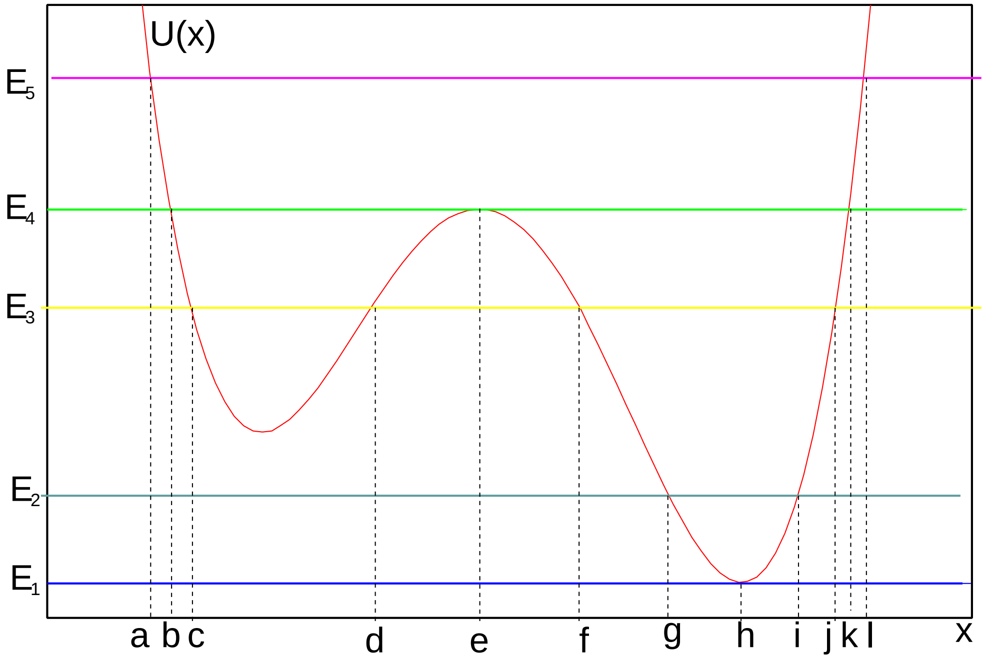
- 質点は, $E - U(x) \geq 0$ であるような x にしか移動できない.
- $E - U(x) = 0$ であるような x では, 速度が 0 になる.

また, $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x)$ より, 物体は $U(x)$ の低い向きに力を受ける.

この性質から, 運動方程式を解かなくても質点の運動の様子がわかる.

位置エネルギーが $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$ となっているような点を **平衡点** という.
平衡点では力が働かないので, 静かに平衡点に置かれた質点は, ずっと平衡点上にいる.

例



$E = E_1$ **のとき** $x = h$ **で静止.**
$x = h$ **は平衡点.**

$E = E_3$ **のとき** $c \leq x \leq d$ **を往復. または,** $f \leq x \leq j$ **を往復**

$E = E_4$ **のとき** $x = e$ **で静止.**
$x = e$ **は平衡点. または,** $b \leq x < e$ **から** $x = e$ **に限りなく近づく. または,** $e < x \leq j$ **から** $x = e$ **に限りなく近づく.** $(t \to \infty)$

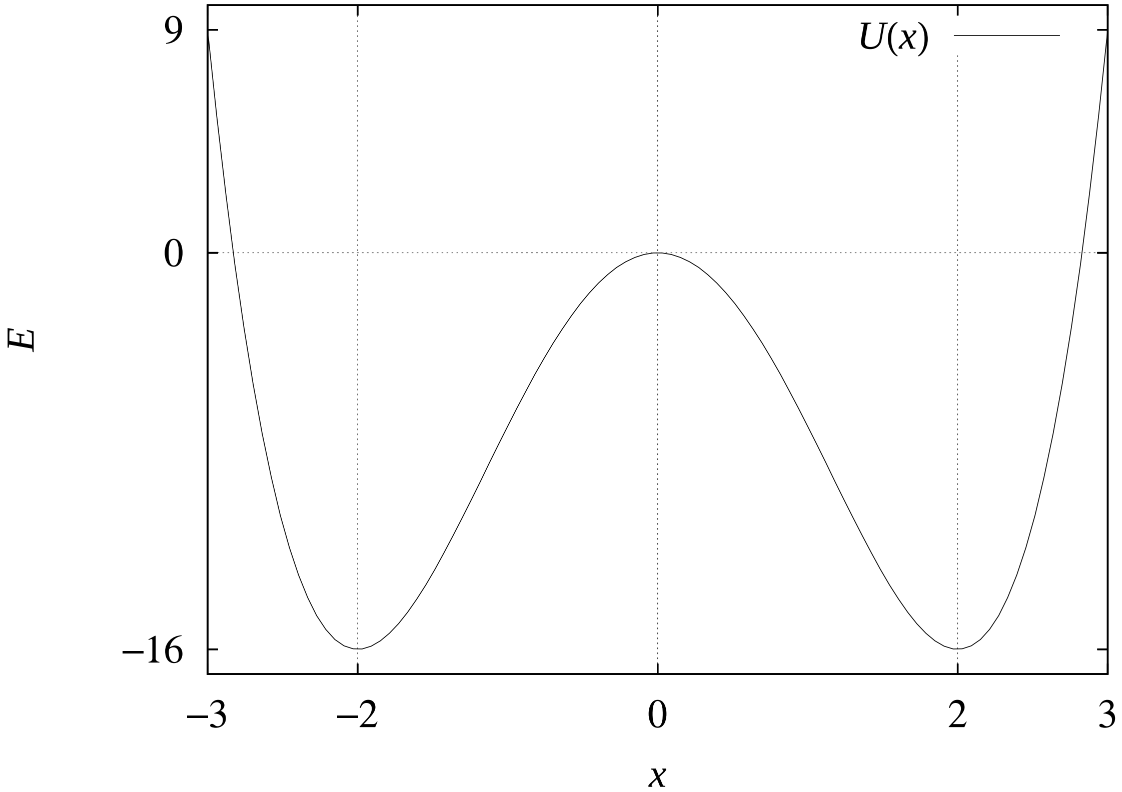
quiz 21

$E = E_2, E_5$ **のときの運動を, 上の例ののりで説明しよう.**

例題 24

直線上を運動する質量 $m=2$ の質点を考える．直線上に x 座標をとる．位置エネルギーは $U(x)=x^4-8x^2$ である．関数 $U(x)$ のグラフは図のようになる．

1. **質点のうける力 $F(x)$ を求めよう．**
2. **平衡点をすべて求めよう．**
3. **時刻 $t=0$ には，質点の位置は $x(0)=-2$，速度は $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-2$ だった．位置エネルギー，運動エネルギー，力学的エネルギーの関係を利用して，時間 $t>0$ に質点が運動する範囲と，運動の様子を答えよう．**
4. **時刻 $t=0$ に，位置 $x(0)=-2$ から出発した質点が，$t>0$ のどこかの時点で，位置 $x=\sqrt{6}$ に到達する，あるいは通過するためには，初速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)$ はどのような範囲の値でなくてはならないか，エネルギー保存則を利用して答えよう．**



9
0
−16
E
U(x)
−3
−2
0
2
3
x

88

10.7 エネルギー保存則を使う解き方と運動方程式を解く解き方の比較

エネルギー保存則を使う解き方

♡ 微分方程式を解かなくても答が出せる.

♡ 異なる時刻の位置と速度を直接関係づけられ, 計算が楽.

♠ 位置と速度を時間の関数として求められない.

♠ 保存力の場合にしか使えない.

運動方程式を解く解き方

♠ 微分方程式が解けないと何もできない.

♠ 計算が長くなる.

♡ 位置と速度を時間の関数として求められる.

♡ 保存力でない場合にも使える.

10.8 興味と暇がある人のための注 1

戸田 p.48

(255) を $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ について解いた

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \tag{277}$$

を積分することによっても $x(t)$ が求められる．落下運動の場合:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - mgx)} \tag{278}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{E}{mg} - x}} = \sqrt{2g}\mathrm{d}t \tag{279}$$

$$-2\sqrt{\frac{E}{mg} - x} = \sqrt{2g}t + C \tag{280}$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2. \tag{281}$$

10.9 興味と暇がある人のための注 2

戸田 3-9

3 次元での保存的な力とポテンシャルとの関係 (応用ベクトル解析)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (-\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z), -\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z), -\frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z)). \tag{282}$$

2 次元以上では, 保存的でない力 (上の形に書けない力) のほうが普通.

ファイナルトライアル

2003/01/23(金)1 講時. 科目の成績は 100 点= quiz 10 + 秋のプチテスト 15 + 冬のプチテスト 25 + ファイナルトライアル 50. 外部記憶ペーパー使えます. 別紙参照してね.

10.10 前回の quiz の略解

quiz 略解 19

力に抗して, だから, $-F$ の力が必要. 仕事は,

$$\int_{-1}^{+2} -F(x)\,\mathrm{d}x = U(+2) - U(-1) = 6 - \frac{3}{4} = \frac{21}{4}.$$

quiz 略解 20

地表面から上向きに測った高さを x とすると, 保存則は $\frac{1}{2}m(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t))^2 + mgx(t) = E$. 落下し始めた瞬間には, $E = mgh_0$. 高さ

$x=h_1$ の点での速さを v_1 とすると, $E=\frac{1}{2}mv_1^2+mgh_1=E$. この 2 つの式から E を消去すると, $v=\sqrt{2g(h_0-h_1)}$.

quiz 略解 21

$E-U(x)\geq 0$ となる領域を考えればよい. $E=E_2$ のとき, $g\leq x\leq i$ を往復. $E=E_5$ のとき, $a\leq x\leq l$ を往復. (ただし, $x=e$ あたりではいったん減速する.)

力に抗して, に関する注意

ほうっておいたら, 質点は, $F=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x)$ の傾きに従って低い方へと移動していく.

$-F=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x)$ の力を別に加えてやると, その場にとどまる.

$-F+$ ちょっとの力 で, ゆっくりでよければ, F に抗して移動させられる. このようにして, $x=x_0$ から $x=x_1$ まで運ぶとき, このとき, 別の

力 $-F+$ ちょっとの力 のする仕事は

$$W=\int_{x_0}^{x_1}-F(x')\mathrm{d}x'=-\int_0^{x_1}F(x')\mathrm{d}x'+\int_0^{x_0}F(x')\mathrm{d}x'=U(x_1)-U(x_0). \tag{283}$$

つまり, 位置エネルギーの差だけの仕事が必要.

たくさん仕事をするほど, 位置エネルギーの高い点まで運べる.

例題 25

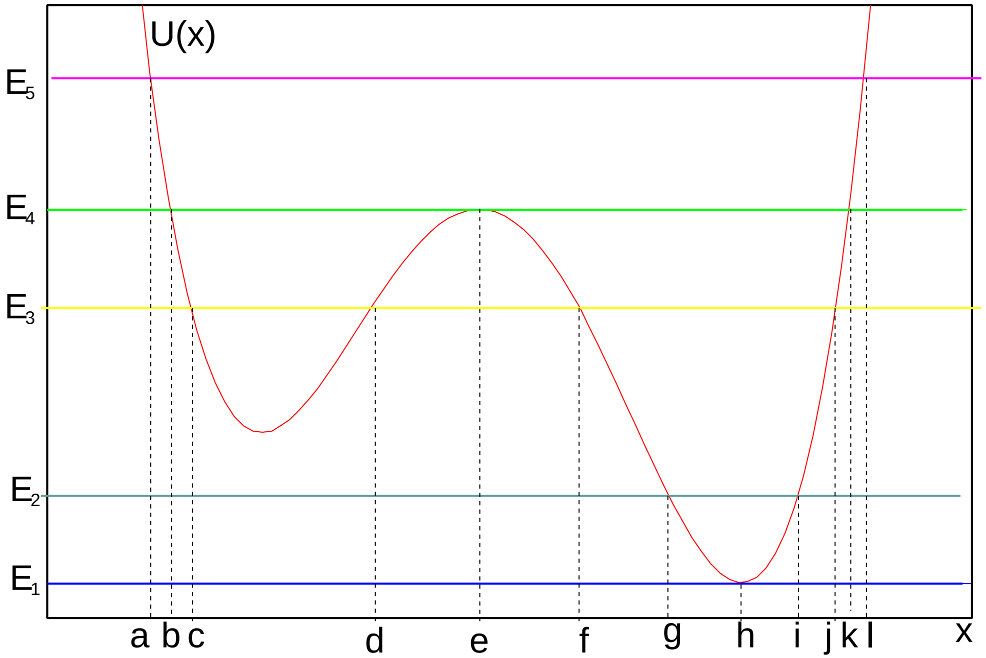
自然長が ℓ, ばね定数が k のばねを鉛直方向に地面に固定した. ばねに, 質量 m の球をとりつけ, 自然長から a だけばねを押し縮めて静かに手をはなして運動させた. 球の達した最も高い点の高さを求めよう.

89

11. 平衡点と微小振動

戸田 p.50

位置エネルギーが $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$ となっているような点を **平衡点** という. ($\text{上の例の } x = e, h$) 平衡点では力が働かないので, 静かに平衡点に置かれた質点は, ずっと平衡点上にいる.



平衡点 $x = x_0$ から, わずかにずれた点に置かれた場合を考えよう.
$x = x_0$ の近くを考えるので, $U(x)$ を $x = x_0$ のまわりにテイラー展開し

て考えてもよい.

$$
\begin{aligned}
U(x) =& U(x_0) + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \cdots \\
\approx& U(x_0) + 0 + \frac{1}{2}k\cdot s^2. \quad \left(k = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\right)
\end{aligned}
\tag{284}
$$

あるいは, $x = x_0 + \Delta x$ と書いたとき,

$$
U(x_0 + \Delta x) = U(x_0) + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2
$$

ただし, $(\Delta x)^3 = (x - x_0)^3$ 以降は小さいので無視した.

ここで, $k = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$ なら, この位置エネルギーは, これはばねについた質点の位置エネルギー

$$
U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{285}
$$

と (定数プラスと, 原点ずらしを除いて) 同じ!

これは,

平衡点 x_0 の近くでは，質点は，近似的に，
$x = x_0$ を中心とする，90 の単振動をする

ことを意味している．これを微小振動という．

このことは，質点の運動方程式が，近似的に

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(U(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2\right) = \boxed{91} \tag{286}$$

となることからもわかる．

このような，$k = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$ の場合 (例 $x = h$) には，質点は x_0 の近くにとどまる．こういうのを 安定な平衡点) という．

一方，$k = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) < 0$ である平衡点から少しずらすと，どんどん離れていってしまう (例．$x = e$) こういうのを 不安定な平衡点) という．

例題 26

位置エネルギー $U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ のもとで, 質量 m の質点が運動している. 平衡点を求めよう. 安定な平衡点については, その周りの微小振動の周期を求めよう.

92

93

quiz 22

位置エネルギー $U(x)=\cos(x)$ のもとで, 質量 $m=3$ の質点が運動している. 平衡点を求めよう. 安定な平衡点については, その周りの微小振動の周期を求めよう.

12. 等速円運動と単振動

戸田 p.57

12.1 等速円運動

(x, y) 平面で運動する質量 m の質点を考える.

時刻 t における質点の座標が

$$(x(t), y(t)) = (A\cos\omega t, A\sin\omega t) \tag{289}$$

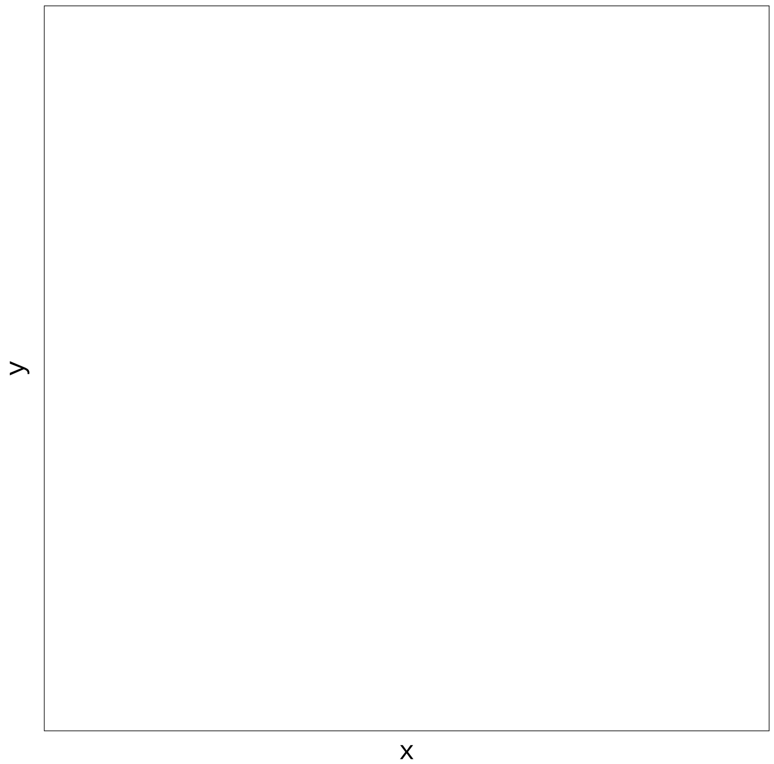
であるような運動を, 原点を中心とする 94 という
$(A > 0, \omega > 0$ は定数$)$

A は円運動の半径, ω は円運動の角速度. $T = \frac{2\pi}{\omega}$ は円運動の周期.

等速円運動をする質点はどのような力を受けているか?

2 次元の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \mathbf{F}, \tag{290}$$



あるいは成分で表示して,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_x, \tag{291}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_y \tag{292}$$

で, (289) を左辺に代入して,

$$F_x = m \times (-\omega^2 A\cos\omega t) = -m\omega^2 x(t) \tag{293}$$

$$F_y = m \times (-\omega^2 A\sin\omega t) = -m\omega^2 y(t) \tag{294}$$

あるいは

$$\mathbf{F} = -\, m\omega^2 \mathbf{r}(t). \tag{295}$$

$$|\mathbf{F}| = m\omega^2 |\mathbf{r}(t)| = m\omega^2 A. \tag{296}$$

つまり, 向きが原点向き, 大きさが $m\omega^2|\mathbf{r}|$ の力 (95 という) がはたらいているときに円運動となる ($|\mathbf{r}|$ は原点からの距離).

12.2 遠心力

ニュートンの運動方程式は 慣性系 で見たときに成立するのだった.

実際, 等速円運動している人の立場で (例. メリーゴーラウンドに乗ってる人. 自転する地球に乗ってる人) の立場に立って考えると, 力 $\mathbf{F}$ があるのに静止している (加速度が零である) ことになり, 運動方程式は成立しない.

しかし, どうしても等速円運動している人の立場で運動方程式を立てたいときは, 遠心力 $-\mathbf{F} = m\omega^2\mathbf{r}$ が働いていて, 向心力 $\mathbf{F}$ とつりあっていて, 加速度が零になっている, と考える.

遠心力は, 観測者が等速円運動していることを表わすために導入された仮想的な力である.

$\Rightarrow$ 回転座標系 (物理数学☆演習 I)

12.3 単振動と等速円運動

ばねの力を 2 次元にした力

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}, \tag{297}$$

のもとで運動する, **質量** m **の質点を考える**.
運動方程式 $m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\mathbf{r}(t)$, **あるいは成分で書いて**,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,kx(t), \tag{298}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,ky(t) \tag{299}$$

の解を, **初期条件**

$$x(0) = A, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0, y(0) = 0, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = \sqrt{k/m}A \tag{300}$$

のもとで求めよう.

$x(t), y(t)$ **は別々に求められる.** $\omega = \sqrt{k/m}$ **とすると,**

$$x(t) = A\cos\omega t, \tag{301}$$

$$y(t) = A\sin\omega t \tag{302}$$

となる. つまり, x, y **座標の一方をみると単振動だが,** (x, y) **としてみると** $\boxed{\text{等速円運動}}$ **である.** $\rightsquigarrow$ **アニメ**

実際, $\boxed{t\ \text{を消去して軌跡を求める}}$ **と,** $x(t)^2 + y(t)^2 = A^2$ **となる.**

- 2 **次元の力** $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$ **のもとでは等速円運動が起きることがある**
- **等速円運動する質点の** x **座標** $(y$ **座標**$)$ **だけをみると単振動である.**

quiz 23

運動方程式 $m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\mathbf{r}(t)$ **の, 初期条件**
$x(0) = A, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0, y(0) = 0, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 2\sqrt{k/m}A$ **のもとでの解の軌跡は楕円である. その式を求めよう.**

12.4 前回の quiz の略解

quiz 略解 22

$\frac{dU}{dx}(x) = -\sin(x) = 0$ となるのは, $x = n\pi$ (n は整数). これらが平衡点. $k = \frac{d^2U}{dx^2}(n\pi) = -\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$. なので, $x = n\pi$ (n は偶数) が不安定な平衡点. $x = n\pi$ (n は奇数) が安定な平衡点. $x = n\pi$ (n は奇数) の近くでは, 位置エネルギー $U(x)$ と力 $F(x)$ は,

$$U(x) = -1 + \tfrac{1}{2}(x - n\pi)^2 + \cdots .F(x) = -\frac{dU}{dx}(x) = -(x - n\pi) + \cdots .$$

よって運動方程式は, $x = n\pi$ (n **は奇数**) **の近くで**

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -(x(t) - n\pi). \tag{303}$$

ここで, $X(t) = x(t) - n\pi$ **とおくと**, $\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ **より**,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) = -X(t). \tag{304}$$

$X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおくと**, (**中略**) $\lambda = \pm\sqrt{1/m}i$. **よって**, **解は**,

$$\begin{aligned} X(t) =& C_1\mathrm{e}^{+\sqrt{1/m}\cdot it} + C_1\mathrm{e}^{-\sqrt{1/m}\cdot it} \\ x(t) =& C_1\mathrm{e}^{+\sqrt{1/m}\cdot it} + C_1\mathrm{e}^{-\sqrt{1/m}\cdot it} + n\pi \end{aligned}$$

$\mathrm{e}^{i\omega t}$, **あるいは** $\sin\omega t, \cos\omega t$ **の周期は** $\frac{2\pi}{\omega}$ **であることから**, **この 微小振動の周期は**, $\frac{2\pi}{\sqrt{1/m}} = 2\pi\sqrt{3}$.

quiz 略解 23

$\omega = \sqrt{k/m}$ として,

$$x(t) = A\cos\omega t, \tag{305}$$

$$y(t) = 2A\sin\omega t \tag{306}$$

となる. t を消去すると,

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = A^2$$

より, 楕円.

13. ファイナルトライアル

出題範囲は, 原則的には物理数学☆演習 II 全体です.

が, 主な範囲は冬のプチテスト以降です. ただし, その範囲を解くにも, (物理数学☆演習 I を含め) それ以前の知識は必要でしょう.

また, この主な範囲とは別に,

- 変数分離型微分方程式
- 2 階微分方程式 $a\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + cx(t) = 0$
- 単振動, 減衰振動, 過減衰

は再度出題します.