物理数学☆演習 II ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2004 年 01 月 23 日更新: Time-stamp: ”2004/02/06 Fri 19:09 hig”

注意

1. 出席チェックのときに学生証を見せてね.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
4. 外部記憶ペーパー作成 10 分 + 答案作成 80 分

1

次の微分方程式を, 初期条件のもとで解いて, $x(t)$ を求めよう. 初期条件から積分定数を決定しよう. 途中で虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ がでてきた場合は, 最終的には i を含まない形に整理しよう.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=-2x(t), \quad x(0)=-3.$

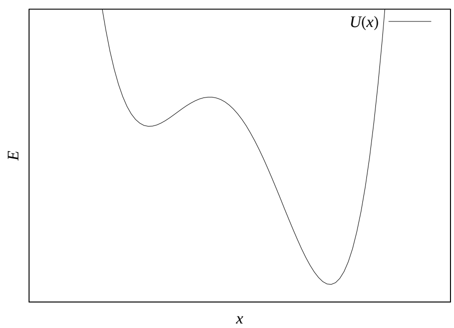
(2) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=\mathrm{e}^{-x}\times\sin(2t), \quad x(0)=\log\frac{1}{2}(=-\log 2).$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+9\cdot x(t)-3=0, \quad x(0)=2, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=0.$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+6\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+13\cdot x(t)=0, \quad x(0)=0, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-4.$

2

質量 $m=3$ の物体が, 一直線上を運動している. 座標を x とし, 時刻 t における位置を $x(t)$ とする. 物体は, 位置エネルギーが $U(x)=3x^4-16x^3+18x^2$ であるような力 $F(x)$ を受けている. 位置エネルギー $U(x)$ のグラフは次の通り (姑息にも軸や目盛は描いてない).



1. 力 $F(x)$ を求めよう.
2. 平衡点をすべて求めよう.
3. $F(x)>0$ となる x の範囲を求めよう.
4. 力学的エネルギー E の値が $E=0$ であるような物体はどのような運動をするか. 往復運動については, 両端の点の座標を答えよう.
5. 安定な平衡点のうち $x>0$ の点のまわりに $U(x)$ を 2 次までテイラー展開して, 微小振動を表す $x(t)$ の運動方程式を求めよう.

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

3

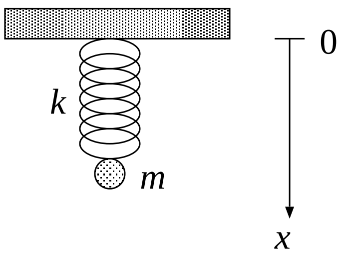
力 $F(x) = -12x$ をうけて運動する質量 $m = 3$ の質点の運動を考える．質点は, 時刻 $t = 0$ に $x = 10$ に静かに置かれ, 1 次元の直線上を運動する．時刻 t における質点の位置を $x(t)$ と書く．

1. 運動方程式を書こう．
2. 初期条件を書こう．
3. 運動方程式を初期条件のもとで解いて, $x(t)$ を求めよう．
4. 時刻 $t = 0$ の次に $x = 10$ に到達する時刻を求めよう．
5. 位置エネルギーを求めよう (記憶に頼らず, 位置エネルギーの定義から計算する)
6. 質点が $x = -1$ を通過するときの速さを, 力学的エネルギー保存則を利用して求めよう．

4

自然長 ℓ , ばね定数 k の (質量を無視できる) ばねの一端を天井に固定する．質量 m の球をつるし, 上下方向にのみ運動させる．

鉛直下向きに x 座標をとり, 天井を原点とする．時刻を t とする．重力加速度の大きさを g とする．



1. 位置 $x(t)$ についての運動方程式を書こう．
2. 物体が静止できる位置 x_0 (すなわち, 物体が力を受けない位置) を求めよう．
3. 力学的エネルギー保存則を書こう (証明しなくてよい．また, ばねの力, 重力の位置エネルギーの式は, おぼえていれば導かないで使ってよい)．
4. さらに, 物体の速さに比例する大きさの空気抵抗の力 (比例定数 $c > 0$) が加わるとする．運動方程式を書こう．
5. $X(t) = x(t) - x_0$ が過減衰となるための c の条件を求めよう．

物理数学☆演習 II ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2004 年 01 月 23 日更新: Time-stamp: "2004/02/06 Fri 19:09 hig"

1

1. 変数分離形.

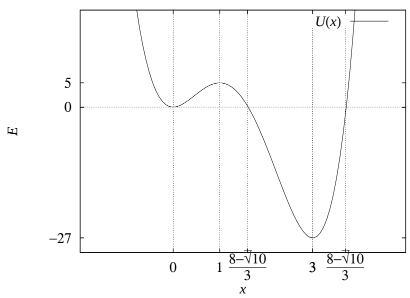
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x}\mathrm{d}x &= -2\mathrm{d}t \\
\log|x| &= -2t + C \\
x(t) &= \pm\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{-2t} = C'\mathrm{e}^{-2t}.
\end{aligned}
$$

   C, C' は積分定数. 初期条件 $x(0) = -3$ より, $C' = -3$. すなわち, $x(t) = -3\mathrm{e}^{-2t}$.
2. 変数分離形. $\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \sin(2t)\mathrm{d}t$ より, $x(t) = \log(C - \frac{1}{2}\cos(2t))$. 初期条件より $C = 1$ で $x(t) = \log(1 - \frac{1}{2}\cos(2t))$.
3. $X(t) = x(t) - \frac{1}{3}$ とおくと, $\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t) + 9X(t) = 0$. これを $X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて λ を定めると, $\lambda = \pm 3i$. よって, 解は $X(t) = C_1\mathrm{e}^{3it} + C_2\mathrm{e}^{-3it}$. ($C_1, C_2$ は積分定数) したがって, $x(t) = \frac{1}{3} + C_1\mathrm{e}^{3it} + C_2\mathrm{e}^{-3it}$. 初期条件より, $C_1 = C_2 = \frac{5}{6}$ となり, $x(t) = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\cos(3t)$.
4. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて λ を定めると, $\lambda = -3 \pm 2i$. よって, 解は, $x(t) = C_1\mathrm{e}^{(-3+2i)t} + C_2\mathrm{e}^{(-3-2i)t}$ (C_1, C_2 は積分定数). 初期条件より, $C_1 = i, C_2 = -i$ となり, $x(t) = -2\mathrm{e}^{-3t}\sin(2t)$.

2

1. $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x) = -12x^3 + 48x^2 - 36x = -12x(x-3)(x-1)$.
2. $F(x) = 0$ となる点で, $x = 0, 1, 3$.
3. $F(x) > 0$ となるのは, $x < 0$ または $1 < x < 3$
4. $E = 0$ の質点が存在できるのは, $E - U(x) \geq 0$ より, $x = 0$ または $\frac{8-\sqrt{10}}{3} \leq x \leq \frac{8+\sqrt{10}}{3}$. ここで, 大小関係は, $1 < \frac{8-\sqrt{10}}{3} < 3 < \frac{8+\sqrt{10}}{3}$. よって, $x = 0$ に静止したまま, または, $\frac{8\pm\sqrt{10}}{3}$ の間を往復運動する.
5. $U(x)$ を $x = 3$ のまわりにテイラー展開すると, $U(x) = -27 + \frac{1}{2}\cdot 72(x-3)^2$. よって, 運動方程式は

$$
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -72(x(t) - 3).
$$



[2]
http://hig3.net/(講 義 の ペ ー ジ も こ こ か ら た ど れ ま す), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

3

1. $3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -12x(t)$. これは, $x(t)$ をのびと見ると, ばねの力と同じ形.
2. $x(0) = 10$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.
3. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて λ を定めると, $\lambda = \pm 2i$. よって解は $x(t) = C_1\mathrm{e}^{2it} + C_2\mathrm{e}^{-2it}$. 初期条件より $C_1 = C_2 = 5$ となり, $x(t) = 10\cos 2t$.
4. $10\cos 2t = 10$ を解いて, $2t = 2n\pi$ (n は整数). よって, 次に $x = 10$ となるのは, $t = \pi$.
5. $U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}\cdot 12x^2$. 力がばねの力と同じなので, 位置エネルギーも結果的には同じ.
6. 力学的エネルギー保存則は

   $$\tfrac{1}{2}\cdot 3\cdot(\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t))^2 + \tfrac{1}{2}\cdot 12x(t)^2 = E.$$

   E は力学的エネルギーで一定. 時刻 $t = 0$ には, $\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 10^2 = E$. $x = -1$ となる時刻には, 速さを $v > 0$ とすると, $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot v^2 + \frac{1}{2}\cdot 12(-1)^2 = E$. 定数 E を消去して v について解くと, $v = 2\sqrt{99} = 6\sqrt{11}$.

4

1.

   $$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k(x(t)-\ell) + mg \tag{1}$$

2. $-k(x_0 - \ell) + mg = 0$ より, $x_0 = \frac{mg}{k} + \ell$.
3.

   $$\tfrac{1}{2}m\left(\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + \tfrac{1}{2}k(x(t)-\ell)^2 - mgx(t) = E. \quad (\text{一定}) \tag{2}$$

4.

   $$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k(x(t)-\ell) + mg - c\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{3}$$

5. $X(t) = x(t) - x_0$ の従う式は,

   $$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{k}{m}X(t) = 0. \tag{4}$$

   $X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいた時に, λ が実数になればいいので, 特性方程式の判別式を考えて, $(\frac{c}{m})^2 - 4(\frac{k}{m}) > 0$ すなわち, $c > 2\sqrt{mk}$.

成績の連絡　成績は 2 月 6 日までに, 龍大 (生協) インターネットのメールアドレス `(学籍番号+1 文字)@ryukoku.seikyou.ne.jp` に連絡します. 携帯メールなど, 他のアドレスで受け取りたい人は, ページ `http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/mail.html` (このページには `http://hig3.net` からも行けます) の説明にしたがって, あらかじめ転送設定しておいてね.

特別研究 (卒業研究) 発表会　2 月 5,6 日に, 3-101,102 講義室で, 数理情報学科の 4 年生の特別研究 (卒業研究) 発表会が行われます. 2 月 17,18 日には M2 の TA の方々の修士論文発表会が行われます. 1 年生のみなさんの見学も歓迎なのでよかったら来てね. 詳細なプログラムは 1 号館 5 階掲示板を参照してね.

講評と樋口の感想

1

1. いちばん基本的な変数分離形の問題です.
2. 変数分離形の問題です. $\frac{1}{x}$ の不定積分は $\log|x|$ だけど, $\mathrm{e}^x = f(t)$ から導かれるのは $x = \log f(t)$ で, $x = \log|f(t)|$ じゃないです. 両辺に同じこと ($\log()$ をとる) をしないといけない.
3. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおくと途中でつまるはず. また $X(t) = 3x(t) - 1$ とおいた人は, $\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) = 3\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ となるはず.
4. 減衰振動の基本的な導出です.

2

1.
2.
3.
4. 動ける範囲が $E - U(x) \geq 0$ となる x であることを使う.
5. 安定な平衡点は, $U''(x)$ を計算しなくても, 図で下に凸で, 傾きが 0 の点.

3

1.
2. 物理の業界用語. 静かに $\Leftrightarrow$ 速度が 0.
3.
4. 位置エネルギーを求めるときは, x はただの (独立) 変数として扱う. $x(t) = 10\cos 2t$ は使わない. (位置エネルギーは特定の初期条件からきまるものではない)
5. 速さなので $-6\sqrt{11}$ は不要.

4

1. 重力は x 軸の正の向きなので $+mg$. ばねの力は復元力なので $x(t)$ と反対向きで $-k(x(t) - \ell)$.
2. これは慣れてない問題だったかもしれません. 運動しているうちに静止するときのことを考えるなら, 運動 $x(t)$ を求めて $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ となる t を求めて$\cdots$ですが, 最初に静かにセットするとそこから動かないような位置を求めるには, 加速度 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ が 0 となればいいので, 力 $F(x_0) = 0$ を解くだけでいいのです.
3. 上の運動方程式に現れる力を素直に $U(x) = -\int^x F(x')\mathrm{d}x'$ すれば位置エネルギーが求められます. 運動エネルギーが加えるのを忘れている例が多くありました.
4. 座標軸の向きに関わらず, 速度と反対向きなので $-c \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$.
5. 空気抵抗だということは $c > 0$.