物理数学☆演習 II 秋のプチテスト

樋口さぶろお[1]
配布: 2003 年 10 月 31 日更新: Time-stamp: "2003/11/21 Fri 12:53 hig"

注意　表のみです．裏は白紙です．

1. 過程も答えよう．最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう．
2. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう．
3. 答案の扱いについて, 次の 2 つのうち希望する方を, 答案用紙の欄にマークしよう．
   (a) 1-508 前引き出しで答案を返却する (第三者が点数を見る可能性がある).
   (b) 答案を廃棄し, 返却も公開もしない．

1

次の微分方程式を解いて $x(t)$ を求めよう．初期条件から積分定数を決定しよう．

(1) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = a - b \cdot x(t), \quad x(0) = 0, \qquad (a, b$ は 0 でない定数$)$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = (1 - x(t))(2 - x(t)), \quad x(0) = 0,$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\dfrac{x(t)}{2t}, \quad x(1) = 4,$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -(x(t))^2, \quad x(1) = \dfrac{1}{2}.$

2

重力 (重力加速度の大きさ g) と空気抵抗の力を受けて, 鉛直方向にだけ運動する質量 m の物体がある．z 座標を鉛直方向にとり, **上向きを正の向きとする**．物体が落下するときの運動を考える．

1. 空気抵抗の力の大きさが, 速さに比例する (比例定数 $\beta > 0$) とする．運動方程式を書こう．また, 終端速度 v_∞ を求めよう．
2. 空気抵抗の力の大きさが, 速さ 4 乗に比例する (比例定数 $\beta > 0$) とする．運動方程式を書こう．また, 終端速度 v_∞ を求めよう．

ただし, 運動方程式は $z(t)$ についてたてよう．また, 運動方程式は落下中だけ成立するものでよい (投げ上げ運動は考えなくてよい)．終端速度の符号は, z 軸の向きにしたがって定める．運動方程式は解かなくてもよい．

3

1 次元を運動する質量 $m = 1$ の物体の, 時刻 t における位置を $x(t)$ とする．この物体は, 力 $F = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ を受ける．物体は, 時刻 $t = -1$ に速度が 1 であり, 時刻 $t = 0$ には位置が $x = 2$ だった．

1. 物体の運動方程式を書こう．
2. 初期条件をすべて書こう．
3. 時刻 $t = 1$ における位置 $x(1)$ を求めよう．

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

物理数学☆演習II秋のプチテスト略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2003 年 10 月 31 日更新: Time-stamp: ”2003/11/21 Fri 12:53 hig”

1

$$(1)\quad x(t) = \frac{a}{b}(1 - \mathrm{e}^{-bt}).$$

$$(2)\quad x(t) = \frac{2\mathrm{e}^t - 2}{2\mathrm{e}^t - 1}.$$

$$(3)\quad x(t) = 4t^{-1/2}$$

$$(4)\quad x(t) = \frac{1}{t+1}$$

2

1. 運動方程式は

   $$(5)\quad m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg - \beta \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t).$$

   極限 $t \to \infty$ で, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ が一定の速度 v_∞ に近づくとすると,

   $$(6)\quad 0 = -mg - \beta v_\infty.\text{すなわち} v_\infty = -\frac{mg}{\beta}.$$

2. 運動方程式は, 落下運動の間は空気抵抗は上向きの力であることから,

   $$(7)\quad m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)^4.$$

   極限 $t \to \infty$ で, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ が一定の速度 v_∞ に近づくとすると,

   $$(8)\quad 0 = -mg + \beta(v_\infty)^4.$$

   $v_\infty < 0$ であることに注意して,

   $$(9)\quad v_\infty = -\left(\frac{mg}{\beta}\right)^{1/4}$$

3

1. 運動方程式は,

   $$(10)\quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t).$$

2. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(-1) = 1, x(0) = 2.$
3. 位置 $x(t)$ を求めるために, まず, 速度 $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ を求める. 運動方程式は

   $$(11)\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -v(t)$$

   であり, これを解くと

   $$(12)\quad v(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t}.$$

   初期条件 $v(-1) = 1$ より, $C_1 = \mathrm{e}^{-1}$ で,

   $$(13)\quad v(t) = \mathrm{e}^{-t-1}.$$

   次に $x(t)$ を求める.

   $$(14)\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-1}$$

   より,

   $$(15)\quad x(t) = -\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-t} + C_2$$

   初期条件 $x(0) = 2$ より, $C_2 = \mathrm{e}^{-1} + 2$. これを代入し, $t = 1$ とすると,

   $$(16)\quad x(1) = -\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-1} + 2.$$

答案の返却は 2003/11/10(月) 以降です. この試験の成績は, 科目の成績 100 点中 15 点分です. 各自の点数は, 採点後, 生協メール (アドレス `t030`*nnna*`@ryukoku.seikyou.ne.jp`) で個別にお知らせします. 携帯メールなど, 他のアドレスで受け取りたい人は, ページ

`http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/mail.html`

(`http://hig3.net` からも行けます) の説明にしたがって, あらかじめ転送設定しておいてください.

`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`, `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `tel:0775437501` 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.