物理数学☆演習 II 冬のプチテスト

樋口さぶろお[1]　配布: 2003 年 12 月 12 日更新: Time-stamp: ”2003/12/26 Fri 10:18 hig”

注意　表のみです．裏は白紙です．

1. 過程も答えよう．最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう．
2. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう．
3. 答案の扱いについて, 次の 2 つのうち希望する方を, 答案用紙の欄にマークしよう．
   (a) 1-508 前引き出しで答案を返却する (第三者が点数を見る可能性がある).
   (b) 答案を廃棄し, 返却も公開もしない．

1

次の微分方程式を解いて $x(t)$ を求めよう．初期条件から積分定数を決定しよう．途中で虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ がでてきた場合は, 最終的には i を含まない形に整理しよう．

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+6\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+10x(t)=0,\quad x(0)=0, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-2.$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=t^2\times x(t),\quad x(0)=-1.$

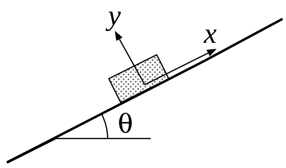
2

$z_1=-\sqrt{3}+i$ の絶対値と偏角, $z_2=-2\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi i}$ の実部, 虚部を求めよう．

3

傾きの角 $\theta>0$ の, 十分に長い斜面がある．質量 m の物体に, 重力 (重力加速度の大きさ g), 垂直抗力 (大きさ N), 静止摩擦力 (静止摩擦係数 μ), 動摩擦力 (動摩擦係数 μ') がはたらく．

物体が斜面に沿って下向きにすべっているとする．図のように x,y 座標軸をとる．物体が斜面の下向きに動いている間について, 時刻を t として, x 方向, y 方向の運動方程式を書こう (解かなくてよい).



4

質量 $m=1$ の質点が, ばね定数 $k=4$ のばねの先に取りつけられていて, 直線上を運動する．直線上に x 軸をとり, 自然長の位置を原点 $x=0$, ばねののびる方向を x の正の向きとする．時刻を t とする．質点にはばね以外の力は働かない．

1. 運動方程式を書こう (数値でなく, アルファベットの変数名を使おう).
2. 任意の定数を C_1, C_2 とするとき, 関数 $x(t)=C_1\cos(2t)+C_2\sin(2t)$ がこの運動方程式の解になっていることを確かめよう．
3. ばねを長さ 3 だけ縮めて, 時刻 $t=0$ に静かに手を放した．このときの定数 C_1, C_2 を定めよう．
4. 上の場合の周期と振幅を答えよう．

---

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

物理数学☆演習II 冬のプチテスト略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2003 年 12 月 12 日更新: Time-stamp: "2003/12/26 Fri 10:18 hig"

1

1. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ を代入すると,

$$(\lambda^2 + 6\lambda + 10)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{1}$$

より, $\lambda = -3 \pm i$. よって, 任意の定数 C_1, C_2 に対して

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{(-3+i)t} + C_2 \mathrm{e}^{(-3-i)t} \tag{2}$$

は解. 初期条件より, $C_1 = -C_2 = i$. よって,

$$x(t) = i\mathrm{e}^{(-3+i)t} - i\mathrm{e}^{(-3-i)t} = -2\mathrm{e}^{-3t}\sin t. \tag{3}$$

2. 変数分離形なので, 積分定数を C, C' を用いて,

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t + C \tag{4}$$

$$\log|x| = \tfrac{1}{3}t^3 + C \tag{5}$$

$$x(t) = C'\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t^3} \tag{6}$$

初期条件より $C' = -1$ で, $x(t) = -\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t^3}$

2

$|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. 図を描いて, $\arg z_1 = \frac{5}{6}\pi$.

$z_2 = -2(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi) = -1 - \sqrt{3}i$. よって, $\operatorname{Re} z_2 = -1$, $\operatorname{Im} z_2 = -\sqrt{3}$.

3

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\sin\theta + \mu' N \tag{7}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\cos\theta + N \tag{8}$$

4

1.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) \tag{9}$$

2.

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)\\ =&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-2C_1\sin 2t + 2C_2\cos 2t)\\ =&-4C_1\cos -4C_2\sin 2t = -4x(t)\end{aligned} \tag{10}$$

より, 解になっている.

3. 初期条件は $x(0) = -3, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$. これより, $C_1 = -3, C_2 = 0$.
4. 運動は $x(t) = -3\cos 2t$ なので, 振幅 $A = |-3| = 3$. 周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

答案の返却は補講日 2003/12/25(木) です. この試験の成績は, 科目の成績 100 点中 25 点分です. 各自の点数は, 採点後, 生協メール (アドレス `t030nnna@ryukoku.seikyou.ne.jp`) で個別にお知らせします. 携帯メールなど, 他のアドレスで受け取りたい人は, ページ

`http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/mail.html`

(`http://hig3.net` からも行けます) の説明にしたがって, あらかじめ転送設定しておいてください.

---

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

冬のプチテスト 講評と樋口の感想

- 返却した答案の 2 枚目の通信欄に緑の数字で書かれているのが 100 点満点の点数です.
- 問 1(1), 1(2), 2,3,4 にはそれぞれ, 四角で囲んだ数が記してあります. ただし, その数を, 1(1),1(2) については 1.0 倍, 2,3 については 1.25 倍 4 については 2/3 倍したものが, その問の点数です.
- 成績についての Web ページあります.

1

1. '途中で虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ がでてきた場合は, 最終的には i を含まない形に整理しよう' となっているので従いましょう. また, $\mathrm{e}^{(3+i)t} = \mathrm{e}^3\mathrm{e}^{it}$ となってしまう人がいました. 気をつけましょう.
2. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (t は定数) とおいて, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}$ を代入して両辺を比べると, $\lambda = t^2$ が出てきますが, λ は定数なのでこれは矛盾です ($\lambda = t^2$ なら $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}$ でなく, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = (t^2)'\mathrm{e}^{(t^2)t} + (t^2)\mathrm{e}^{(t^2)t} = 3t^2\mathrm{e}^{t^3}$ となる). したがって, この形の解は存在しません. そこでこの方法はあきらめ, 変数分離形と見なして解くことになります.

2

複素数の基本的な問題です. $-1 - \sqrt{3}i$ の虚部は $\sqrt{3}i$ でなく, $\sqrt{3}$ であること, 偏角といった場合にはラジアンで答えることに注意しましょう.

3

授業でよくとった座標系とは, x 軸の向きが逆になっています. 運動方程式を記憶するのでなく, その場合の座標系に応じて運動方程式を導けるようになりましょう.

4

1. ばねの力は復元力なので, $+kx(t)$ でなく $-kx(t)$ です. そうでないと, 次の問で困るはずです.
2. 解であることを確かめるには, 代入してみて微分方程式が満たされることをいえば十分です. ゼロから解いてみる必要はありません (が, ゼロから解いて得た答と一致するといってもかまいません).
3. 1,2 ができなくても解けるはずです. 縮めているので, $x(0) = -3$ となります. また,

   $$x(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t = C_1'\mathrm{e}^{2it} + C_2'\mathrm{e}^{-2it} \tag{11}$$

   と書いたとき, もちろん $C_1 \neq C_1', C_2 \neq C_2'$ です. 問題で求められているのは C_1, C_2 なので, C_1', C_2' を求めたのなら, オイラーの公式で C_1, C_2 を計算する必要があります.
4. 振幅は, 変位の絶対値の最大値です. 振幅は 1,2 ができなくても 3 ができていれば求められるはずです. 周期は, 変位と速度が両方もとにもどるまでに要する時間です. 周期は 1,2,3 ができなくても求められるはずです.