樋口さぶろお[a] 更新 `Time-stamp: "2003/09/26 Fri 12:41 hig"`

物理数学☆演習 II

- 講義の Web page

  `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/`

  また,

  `http://hig3.net`　(携帯にも対応)

  からも容易にたどれます.

- この紙は, 上の Web page や 1-508 前の引き出しで事前に配っていることもあります.

- 成績は 100 点=平常点 10 + 秋のプチテスト 15 + 冬のプチテスト 25 + ファイナルトライアル 50. プチテストの日程は追って連絡します.

- 毎回, 理解を確かめる quiz をします. 配った紙に解いて提出してください. フォルダーを学籍番号でグループ分けしています.
- 紙は, チェックした後, 1-508 前の引き出しで返却します. ただし, 数週間以上経過したものは処分することがあります.
- 戸田 n.m, 戸田 p99 などは, 教科書 (戸田, 力学) の参照個所を示します.
- TA 大槻 真也さん (樋口研), 辻 祐介さん (樋口研), 前 直弘さん (飯田研).
- 再履修の方へ: 2002 年度以前の内容と同じではありません (重なる部分は多いですが)
- 前期の物理数学☆演習 I ファイナルトライアルの答案をお返しします. 下の時間帯に, 樋口の部屋ではなく実験室で院生の人から受け取ってね (要学生証). 9 月 26 日 (金) 13:10–14:40 1-539 実験室.

1. ニュートンの運動の 3 法則

1.1 第 2 法則 (ニュートンの運動方程式)

戸田 2-2

t: 時刻 , $\mathbf{r}(t)$: 位置ベクトル, $\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)$: 速度ベクトル, $\mathbf{r}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)$: 加速度ベクトル.

物体の加速度 $\mathbf{a}(t)$ は, 物体の受ける 力 ベクトル $\mathbf{F}(t)$ で決まる.

加速度 $\mathbf{a}(t)$ の向き: 力 $\mathbf{F}(t)$ の向きと同じ.

加速度 $\mathbf{a}(t)$ の大きさ: 質量 m に反比例, 力 $\mathbf{F}(t)$ の大きさに比例.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{1}{m}\mathbf{F}(t) \quad \text{すなわち} \quad \boxed{1} \tag{1}$$

これを ニュートンの運動方程式 という.

基本ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を使って $\mathbf{F}(t) = F_x(t)\mathbf{i} + F_y(t)\mathbf{j} + F_z(t)\mathbf{k}$ と成分で書くと

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_x(t), \tag{2}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_y(t), \tag{3}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_z(t). \tag{4}$$

位置	微分 → / ← 積分	速度	微分 → / ← 積分	加速度
$\mathbf{r}(t)$	$\underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}}$	$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)$	$\underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}}$	$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)$

2

例題 1

時間を t **とするとき**, **ある質量** $m = 4$ **の粒子の位置ベクトルの** x **成分は** $x(t) = \frac{1}{4}(1 - \mathrm{e}^{-4t}) + 1$ **である**. **速度ベクトルの** x **成分は** $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$, **加速度ベクトルの** x **成分** $a(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ **を求めよ**. **力の** x **成分** $F(t)$ **を求めよう**.

3

例題 2

質量 m **の物体に重力** $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ **がはたらいている．このとき，物体の運動は，**

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} + \mathbf{A}t + \mathbf{B} \tag{8}$$

と書ける．ただし，A, B **は時間によらないベクトル．これが第** 2 **法則を満たすことを示せ．**

4

1.2 第 1 法則 (慣性の法則)

戸田 2-1

第 2 法則で, $\mathbf{F}=\mathbf{0}$ のとき,

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)=\mathbf{0}\,(=\mathbf{F})\,. \tag{9}$$

物体は, '力' の作用を受けないかぎり, 等速直線運動をする. (特に, 速度 0 すなわち静止の場合もある)

例: エアホッケーのパック, 電車の中の風船, 無重力状態の宇宙飛行士.

例でないもの: 地面を転がるボール, 自転車, 自動車.

観測者は地面に固定されているとは限らない.

等速直線運動する電車, 飛行機, エレベータでもよい. 慣性系

5

では成り立たない.

1.3 第 3 法則 (作用 · 反作用の法則)

戸田 2-3

物体 1 **が物体** 2 **に力** $\mathbf{F}_{12}$ **を及ぼすとき**, **物体** 2 **も物体** 1 **に力** $\mathbf{F}_{21}$ **を及ぼす**. **その向きは反対**, **大きさは同じ**.

$$\boxed{6} \tag{10}$$

例: **銃の発射の反動**. **地球とりんご** (**重力**). **下敷と髪の毛** (**電気力**), **水に浮かぶ** 2 **せきのボートで**, **一方がもう一方を押したとき**.

1.4 運動方程式を解く

しばらく, 運動が x 方向に限られた場合を考えよう. つまり,

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), 0, 0), \quad \mathbf{v}(t) = (v(t), 0, 0), \quad \mathbf{a}(t) = (a(t), 0, 0), \quad \mathbf{F} = (F, 0, 0)$$

の $x(t), v(t), a(t), F$ だけを考えよう.

力 F が与えられたときに, 運動方程式を解いて $x(t)$ を求めるのが, 力学の典型的な問題.

例題 3

時間を t とする. 質量 $m = 1$ の物体が, 力 $F = \mathrm{e}^{-t}$ を受けて運動している. 時刻 $t = 0$ で $x = 0$ に静止していた物体の運動を求めよ.

言葉の使い方:

運動を求めよ $\Leftrightarrow$ 時刻 t での位置 $x(t)$ を求めよ.

静止していた $\Leftrightarrow$ 速度が 0 だった $\Leftrightarrow$ $v(0) = 0$.

7

8

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t} + t - 1. \tag{18}$$

これで運動方程式が '解けた' ($x(t)$ **が求まった**).

別解

神の啓示により, $x(t) = \mathrm{e}^{-t} + t - 1$ **とおいてみると**,

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t} + t - 1. \qquad x(0) = 0. \tag{19}$$

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 1. \qquad v(0) = 0. \tag{20}$$

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = +\mathrm{e}^{-t}. \tag{21}$$

よって, **解になっている**.

これは前の解き方の検算にもなっている. **前の解き方をしたときは検算を必ずしよう**.

運動方程式 **を解くために積分** (2 **回**!) **すると**, **積分定数** (2 **個**) **が出てくる**. **これを決定するのに**, **初期条件** (2 **個**. **今なら** $x(0), v(0)$) **を使う**.

1.5 力の働かないときの 3 次元の運動

$$\text{力が働かない} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \mathbf{0} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \rightsquigarrow \begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0. \end{cases} \tag{22}$$

$x(t)$ は, 上の方法で求められる.

9

y, z **成分も同様.**

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \times t + D_1, \\ y(t) = C_2 \times t + D_2, \\ z(t) = C_3 \times t + D_3, \end{cases} \quad \textbf{別の書き方} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \tag{25}$$

または

$$\boxed{} \tag{26}$$

10

等速直線運動! $\cdots$ **第 1 法則の結論**

$C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ **は積分定数.**

1.6 微分方程式

未知関数 $x(t)$ に関する方程式で, 微分を含んでいるもの
を **微分方程式** という.

求めるのは未知数でなく未知関数!

$x(t)$ を求める（微分を含まない式にする）ことを, **微分方程式を解く**
(微分方程式を積分する) という.

$x(0) = 0$ や $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(3) = 2$ のような, 特定の時刻 t についての条件を,
初期条件 という.

ここまで出てきた微分方程式はいちばん簡単なタイプ. (2 階常微分方程式の中の特別に簡単なもの)

quiz 1

物理数学☆演習 I, 物理学序論の感想, 物理数学☆演習 II への希望, きょうの授業に対する感想 (速すぎた, 遅すぎた, まだ習っていないことを習っているかのように扱っている, 他の授業と記号が違う, プロジェクター/黒板が見にくい, など) を何でも書いてください. なお, `http://hig3.net` からも随時メッセージを送れます.

quiz 2

時間を t とする. 質量 $m=1$ の物体が, 力 $F=-\cos t$ を受けて運動している. 時刻 $t=0$ で $x=1$ に静止していた物体の運動を求めよう.

quiz 3

時間を t とするとき, ある粒子の速度ベクトルの x 成分は $v(t)=-\sin(4t)$ である. 加速度ベクトルの x 成分 $a(t)$ と, 位置ベクトルの x 成分 $x(t)$ とを求めよう. ただし, $x(0)=1$.