| 全体 | 目次 | 前回 | 次回 | 略解 |
樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp:"2003/10/02 Thu 12:16 hig"

1.7 先週の quiz

quiz 略解 1

ご意見ありがとうございました.

quiz 略解 2

2 回積分すると, $x(t)=\cos(t)+C_1t+C_2$. 初期条件 $x(0)=1, v(0)=0$ より, 積分定数を決めて $x(t)=\cos(t)$.

quiz 略解 3

加速度は, $v(t)$ を t で微分して $a(t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)=-4\cos(4t)$.

---

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

位置は, t **で積分して** $x(t) = \frac{1}{4}\cos(4t) + C$. **初期条件** $x(0) = 1$ **より** $C = \frac{3}{4}$. $x(t) = \frac{1}{4}\cos(4t) + \frac{3}{4}$.

2. 変数分離型微分方程式

今日の目標

- 空気抵抗の力 (だけ) を受ける物体の運動方程式が書ける
- 変数分離型微分方程式が解ける.

2.1 空気抵抗のある場合の運動

戸田 p.34

空気抵抗だけを受ける, 1 次元の運動を考えよう. たとえば, エアホッケーのパックの運動.

物体の受ける 空気抵抗 は, 向きは速度 $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ と反対向き, 大きさは速さ $|v(t)| = |\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)|$ に比例.

$$\text{空気抵抗の力} \quad |F| = k|v(t)| = k\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right| \quad (k \text{ は正の比例定数}) \tag{27}$$

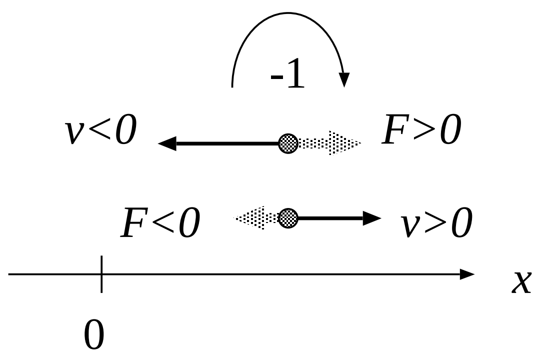
向きまで真剣に考えよう.

$$\textbf{空気抵抗の力}\quad F = k \times (\mp 1) \times \left| \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \right| = -k \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{28}$$

符号がこれでよいこと. $-$: **物体が右向き**, $+$: **物体が左向きの運動.**

速度	$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$	1 **行目** $\mp 1 \times \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right|$	2 **行目** $-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$
右向き	$(+)$	$(-)\times(+)=(-)$	$(-)\times(+)=(-)$
左向き	$(-)$	$(+)\times(+)=(+)$	$(-)\times(-)=(+)$

$-k \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **の** $-$ **は速度ベクトルと反対向きの力であることを意味.**



質量を m とすると運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{29}$$

1 階微分で書こう. $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ なので,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{k}{m}v(t).} \tag{30}$$

しばらくこのタイプの微分方程式の解を考えよう. 微分すると自分の $-k/m$ 倍になる関数って何?

$$v(t) = \boxed{\quad 11 \quad} \tag{31}$$

2.2 変数分離型微分方程式の解き方

和達 p.66

例題 4

次の性質を満たす関数 $x(t)$ **を求めよう.**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t), \qquad \textbf{初期条件}\ x(0) = 4. \tag{32}$$

(**文字** v **を** x **に変えましたが, 深い意味はありません**).

間違いの例 1. **両辺を '積分' して,**

$$x = x^2 + C.\textbf{よって}\ x = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4C}}{2}. \tag{33}$$

あれっ, x **って** t **の関数** $x(t)$ **じゃなかったの?**

間違った点:

12

両辺を t で積分する (両辺に $\int \cdots \mathrm{d}t$ をつける) ならよい.

間違いの例 2. **両辺を t で積分して,**

$$x(t) = \int 2x(t)\mathrm{d}t + C. \tag{34}$$

正しくない点: 13

2 **次方程式** $x^2 + 2x + 1 = 0$ **の解を** $x = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)$ **と答えるようなもの.**

正しい解き方の例

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t) \tag{35}$$

まず $x(t)$ **を左辺に集める．今の式には** t **はないが，あれば右辺に集める．以下の例題を参照．**

$$\frac{1}{x(t)}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2 \tag{36}$$

両辺を t **で積分**

$$\int \frac{1}{x(t)}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\ \mathrm{d}t = \int 2\ \mathrm{d}t \tag{37}$$

ここで，

$$\textbf{右辺} = \int 2\ \mathrm{d}t = 2t + C_1. \tag{38}$$

一方, **左辺で変数変換**. **変数を** t **から** $s = x(t)$ **に変えて置換積分**.

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t \tag{39}$$

なので,

$$\textbf{左辺} = \int \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \log|s| + C' = \log|x(t)| + C_2. \tag{40}$$

よって,

$$\log|x(t)| = 2t + C' (= 2t + C_1 - C_2) \tag{41}$$

これを整理し, **初期条件を使うと**, $x(t) = 4\mathrm{e}^{2t}$. (**後で黒板でやります**)

2.3 覚え方 (この科目の quiz や試験ではこのやり方でいい)

14

15

$$x(t) = 4\mathrm{e}^{2t}.$$

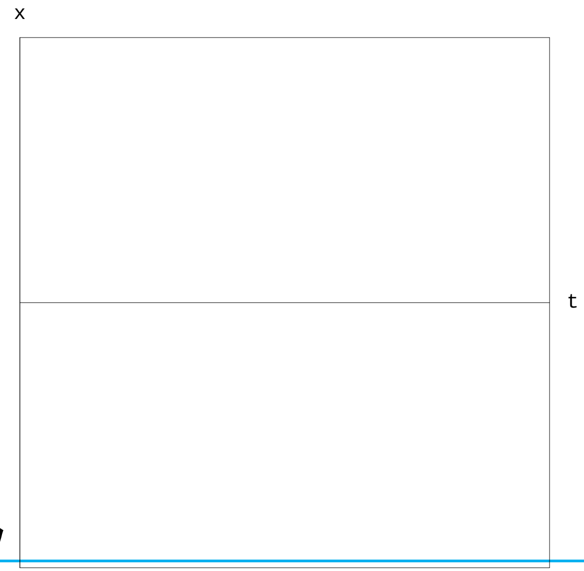
空気抵抗のある場合の運動の解

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{k}{m}v(t), \quad v(0) = C \tag{45}$$

の解は

16

グラフ



$$v(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}. \tag{46}$$

2.4 一般の変数分離形

上で見た解き方は,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(x)g(t) \tag{47}$$

のような形 (変数分離形) のときに使える.

いままでやってきた微分方程式も, 実は変数分離形と思える. 当面, すべての微分方程式はこの方法で解くと考えよう.

変数分離形でない例

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = t + x(t) \tag{48}$$

右辺が掛け算じゃない.

例. 落体の運動

運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -mg \tag{49}$$

これは変数分離形 ($f(x) = 1, g(t) = -mg$ **などと思える**). **両辺に** $\mathrm{d}t$ **をかけて**

$$\mathrm{d}v = -\,g\,\mathrm{d}t \tag{50}$$

両辺に $\int$ **をつけて**

$$\int 1\,\mathrm{d}v = \int (-g)\,\mathrm{d}t + C \qquad (C\ \text{は積分定数}) \tag{51}$$

$$v(t) = -\,gt + C \tag{52}$$

例題 5

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{t}{x(t)}, \quad x(0) = 2. \tag{53}$$

を解こう

17

quiz 4

次の微分方程式を，それぞれ，初期条件のもとで解こう.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -3x(t), \quad x(0) = 2. \tag{54}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -x(t)^2, \quad x(0) = 2. \tag{55}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -t^2, \quad x(0) = 2. \tag{56}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -1 - x(t), \quad x(0) = 2. \tag{57}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = t \cdot x(t), \quad x(0) = 2. \tag{58}$$