樋口さぶろお[a] 更新 `Time-stamp:"2003/10/02 Thu 12:16 hig"`

2.5 先週の quiz

quiz 略解 4

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -3x(t), \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = C\mathrm{e}^{-3t}, \quad C = 2. \tag{59}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -x(t)^2, \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = \frac{1}{t+C}, \quad C = 1/2. \tag{60}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -t^2, \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + C, \quad C = 2. \tag{61}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -1 - x(t), \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = -1 + C\mathrm{e}^{-t}, \quad C = 3. \tag{62}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = t \cdot x(t), \quad x(0) = 2. \leadsto x(t) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}, \quad C = 2. \tag{63}$$

ちょっと解説.

18

3. 空気抵抗のある場合の落下運動

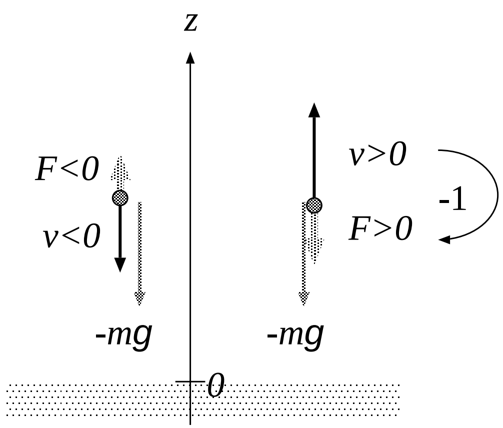
今日の目標

- 空気抵抗の力と重力の両方を受けて鉛直方向にだけ運動する物体の運動方程式が書ける.
- なぜありさんは通天閣からを落ちてもけろっとしてるかわかる.
- 変数分離型微分方程式が, 部分分数展開で解ける.

3.1 鉛直方向の運動

戸田 p.34

質量 m の物体が重力 $-mg$ と空気抵抗の力 $-k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ のもとで運動する. 鉛直上向きに z 軸をとり, 時刻 t の位置を $z(t)$ とする.



運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + \qquad k \times \begin{cases} +\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right| & (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) < 0, \downarrow) \\ -\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right| & (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) > 0, \uparrow) \end{cases} \tag{64}$$

$$= -mg + \qquad k \times (-1) \times \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \tag{65}$$

第 2 項 $k \times (-1) \times \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ の符号がこれでよいこと.

速度	$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$	$(\pm 1) \times \left\lvert\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right\rvert$(1 行目)	$(-1) \times \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$(2 行目)
下向き $\downarrow$	$(-)$	$(+) \times (+) = (+)$	$(-) \times (-) = (+)$
上向き $\uparrow$	$(+)$	$(-) \times (+) = (-)$	$(-) \times (+) = (-)$

$k \times (-1) \times \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ の (-1) は速度ベクトルと反対向きの力であることを意味.

(65) を解こう.

2 **階は** 1 **階ずつ考えるのだった**. $v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ **とおいて**,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -g - \frac{k}{m}v(t). \tag{66}$$

を $v(t)$ **について解く**. **これは変数分離型なので**, v **を左に** t **を右に**.

19

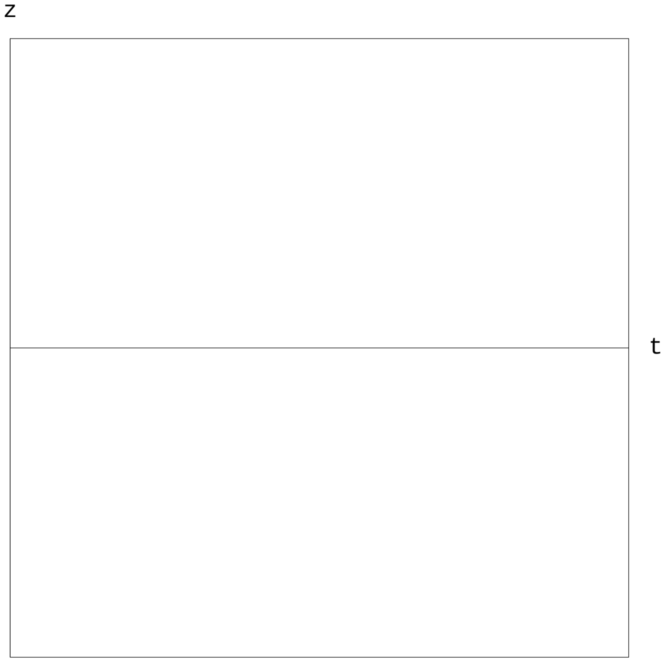
よって解は,

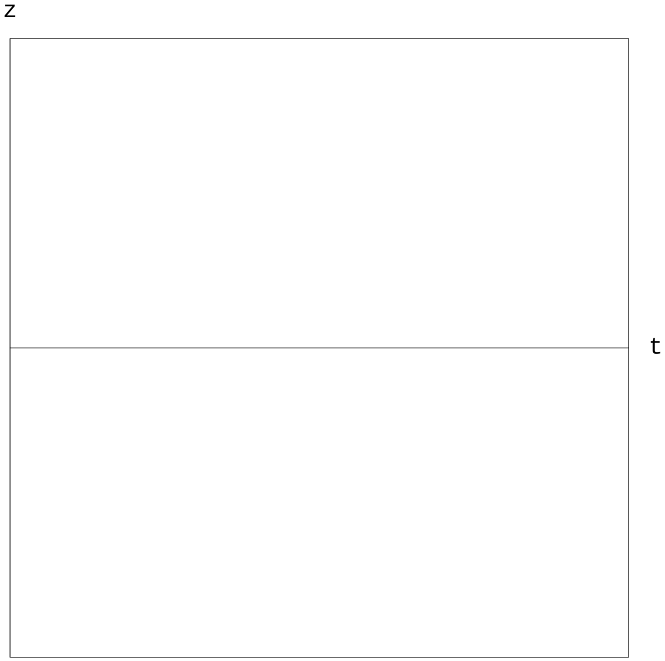
$$v(t) = \boxed{20 \qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{67}$$

$v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ **なので**, **これをもう一度**, $z(t)$ **についての変数分離型微分方程式とみて解く**.

$\boxed{21 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$$z(t) = C_2 - \frac{mg}{k}t + C_1 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{68}$$





3.2 終端速度

戸田 p.56

上の解から, $t \to \infty$ **で** $v(t) \to v_\infty = -\frac{mg}{k}$ **となることがわかる．この** v_∞ **を** 終端速度 **という．終端速度は，微分方程式を解かなくても，** $0(= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)) = -g - \frac{k}{m}v_\infty$ **を解くだけで得られる．なぜなら**

22

例題 6

通常, 空気抵抗の力の大きさは, 速度に比例するが, 仮に, 速度の 2 乗に比例する空気抵抗と重力とを受ける物体があったとする. 時刻 $t=0$ に, 速度 $v_0(<0)$ で発射する. 運動方程式をたて, 速度 $v(t)=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ について解け. 終端速度 v_∞ はどれだけか. 質量を m, 比例定数を k とする.

運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + \boxed{\quad 23 \quad} \tag{69}$$

問題の運動では, 常に $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)<0$ であるので,

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -g + \frac{k}{m}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 \times (+1) \tag{70}$$

よって, $v(t)=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)=-g+\frac{k}{m}v(t)^2 \tag{71}$$

を解く.

3.3 部分分数展開

微分積分 p.78

上の微分方程式を解こう. 記号が多いとややこしいので, まず,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{k}{m}\left(v(t)^2-\frac{mg}{k}\right) \tag{72}$$

で $a=\frac{k}{m}, b=\sqrt{\frac{mg}{k}}$ とおく.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)=a\cdot(v(t)^2-b^2), \qquad \text{初期条件} \quad v(0)=v_0 \tag{73}$$

を考えよう. 変数分離形なので,

$$\frac{1}{v^2-b^2}\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t \tag{74}$$

ここで,

24

より, 部分分数展開

$$\frac{1}{v^2 - b^2} = \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{v-b} - \frac{1}{v+b}\right)$$

を利用すると,

25

26

$$v(t) = b \times \frac{1 + C'' \mathrm{e}^{2abt}}{1 - C'' \mathrm{e}^{2abt}} = -b \times \frac{C'' + \mathrm{e}^{-2abt}}{C'' - \mathrm{e}^{-2abt}}$$

3.4 きょうの quiz

quiz 5

次の変数分離型微分方程式を解こう．積分定数は決めなくてよい．(Hint. **右辺を因数分解して部分分数展開**)

$$3 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = x(t)^2 + x(t) - 2 \tag{75}$$

quiz 6

1 次元を運動する質量 $m = 1$ の物体の, 時刻 t の位置を $x(t)$ とする. この物体は, 速度 $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ によって決まる力 $F = -2v(t) - v(t)^2$ を受けている. 時刻 $t = 0$ での速度は $v(0) = 1$ である.

1. 運動方程式を書こう.
2. 初期条件を書こう (1 個しかない).
3. 時刻 t における速度 $v(t)$ を求めよう.
4. 時刻 $t = 1$ における速度 $v(1)$ を求めよう.