樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp:"2003/10/02 Thu 12:16 hig"

チューターに質問しよう!

大学院生のチューターのみなさんが質問に答えてくれます．予約などはいりません．でも，たまに予定変更あります．

曜日	時間	部屋		
		1-530	1-541	1-615
月	12:30 – 13:30	田中		前
火	12:30 – 13:30		渡邊	前
水	12:30 – 13:30	田中		
木	12:30 – 13:30	佐々木		
金	12:30 – 13:30	佐々木	渡邊	

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

ニュース! 10/31(**金**) **に秋のプチテストあります!** **掲示参照.** **変数分離形の解き方は超重要です.**

ニュース! 10/31(**金**) **に実用数学検定過去問検討会やります!** **掲示参照.**

3.5 先週の quiz の略解

quiz 略解 5

部分分数展開

$$3 \cdot \frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \tag{76}$$

を用いて,

$$x(t) = \frac{1+2Ce^t}{1-Ce^t}. \tag{77}$$

quiz 略解 6

27

28

3.6 再び落下運動と終端速度

戸田 p.56

前回 3.3 **で求めた速度の式**

$$v(t) = b \times \frac{1 + C'' \mathrm{e}^{2abt}}{1 - C'' \mathrm{e}^{2abt}} = -b \times \frac{C'' + \mathrm{e}^{-2abt}}{C'' - \mathrm{e}^{-2abt}} \tag{80}$$

で, $a = \frac{k}{m}, b = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ **を元に戻すと**,

$$v(t) = -\sqrt{\frac{mg}{k}} \times \frac{C'' + \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}}{C'' - \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}}. \tag{81}$$

初期条件 $v(0) = v_0$ **より**, $C'' = \frac{v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v_0 + \sqrt{\frac{mg}{k}}}$. **ここで**, $\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t} \to 0$ $(t \to \infty)$ **より**

$$\text{終端速度 } v_\infty = \boxed{\quad 29 \quad} \tag{82}$$

これは

$$\boxed{30\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{83}$$

からも求まる. $\pm$ のうち $-$ をとるのは下向きの運動だから.

以下, 先週の箱 22 にいれるべき内容.

$t \to +\infty$ で $v(t) \to v_\infty$ と収束するとすると, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) \to 0$ となるはず. したがって, 運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = F(v(t)) \tag{84}$$

で $t \to +\infty$ としたものは,

$$0 = F(v_\infty). \tag{85}$$

ここから終端速度 v_∞ が求められる.

例題 7

高さ h の塔のうえに, ボール (質量 m) が支えられていた. 時刻 $t=0$ に, 支えを静かにはずしたところ, ボールは, 重力 (重力加速度の大きさ g) と, 速度に比例する空気抵抗の力 (比例定数 $k>0$) を受けて落下した.

鉛直上向きに z 軸を取る. 原点を地表とする. 時刻 t でのボールの位置を $z(t)$ とし, $v(t)=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ とする.

$v(t), z(t)$ を求めよう.

31

32

4. 空気抵抗のある 3 次元の運動

4.1 空気抵抗がない場合の放物運動

戸田 p.52

物理数学☆演習 I の 9.4 でやったことの復習です.

鉛直方向に z 軸, 水平面内に x, y 軸をとる. 地表の高さを $z = 0$ とする.

地表近くの, 質量 m の物体には,
大きさ mg, 鉛直下向きの $\boxed{\text{重力}}$ $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -mg)$ が働く.

$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$: $\boxed{\text{重力加速度}}$.

$$\rightsquigarrow \begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = V_x t + C_x, \\ y(t) = V_y t + C_y, \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_z t + C_z. \end{cases} \tag{86}$$

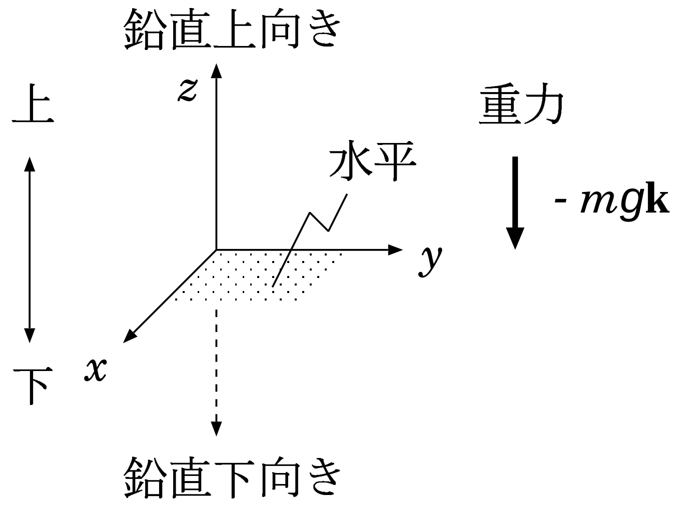
積分定数 $V_x, V_y, V_z, C_1, C_2, C_3$. 2 階 $\times$ 3 次元 $= 6$ 個.

簡単のため, $C_x = C_y = C_z = 0, V_y = 0.$

$$y(t) = 0, \tag{87}$$

$$x(t) = V_x t, \tag{88}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_z t. \tag{89}$$



軌跡

$x(t)$ **の式と** $z(t)$ **の式から** t **を消去して**

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{V_x^2} (x - x_\mathrm{m})^2 + z_\mathrm{m} \tag{90}$$

ただし,

$$x_\mathrm{m} = \frac{V_x V_z}{g}, \quad z_\mathrm{m} = \frac{V_z^2}{2g}. \tag{91}$$

これって $\boxed{\textbf{放物線}}$!

4.2 空気抵抗がある場合の放物運動

戸田 p.55

重力の他に, 速さに比例する空気抵抗の力 (比例定数 $k>0$) があるとする. z 軸の正の向きの方向の単位ベクトルを $\mathbf{k}$ とかくと, 位置 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ に対する運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)=-mg\mathbf{k}-k\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t). \tag{92}$$

成分で書いて,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=\boxed{33\qquad\qquad}, \tag{93}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t)=0-k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t), \tag{94}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t)=\boxed{34\qquad\qquad} \tag{95}$$

$y(t)$ は $x(t)$ と同じなので, 以下, $x(t),z(t)$ を考える.

まず, $v_x(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$, $v_z(t)=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ に対する 1 階の微分方程式と考え,

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(t)=-kv_x(t), \tag{96}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}(t)=-mg-kv_z(t) \tag{97}$$

を別々に変数分離型微分方程式として解く. 先週の結果から,

$$v_x(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{98}$$

$$v_z(t)=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)=-\frac{mg}{k}+C'\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{99}$$

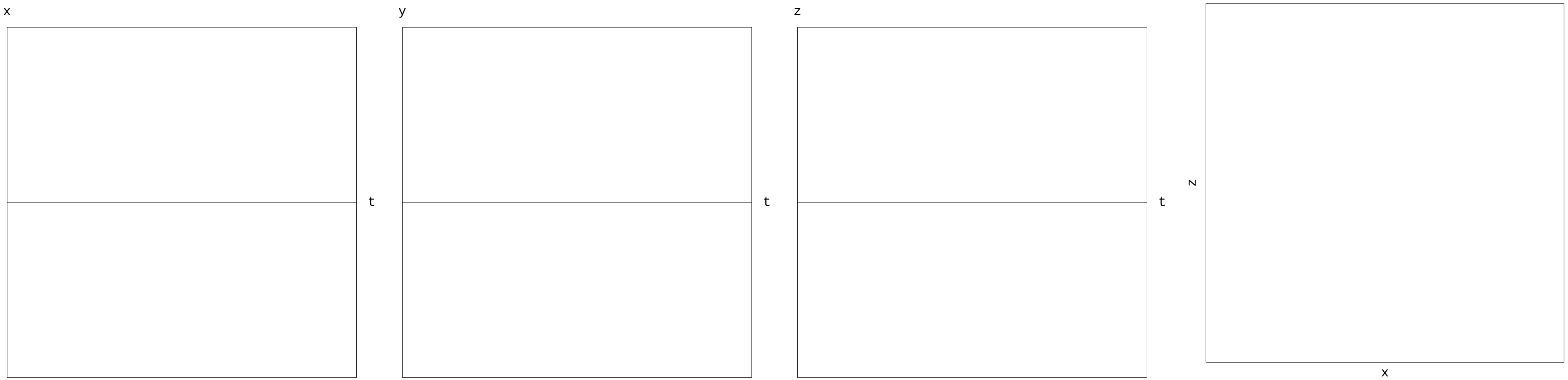
少し記憶力に頼って楽する方法

35

もう一度積分して $x(t), z(t)$ を求めると,

$$x(t) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}, \tag{100}$$

$$z(t) = C_3 - \frac{mg}{k}t + C_4 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{101}$$



	終端速度 v_∞	x 方向の到達距離
空気抵抗あり	36	$< C_1$
空気抵抗なし	37	$2x_{\mathrm{m}}$

終端速度だけ簡単に求めてみよう

38

quiz 7

質量 m **の物体の鉛直方向** 1 **次元の運動を考える．上向きを** z **軸の正の向きにとり，時刻** t **の位置を** $z(t)$ **とする．下向きの重力** mg **と，速さの** 3 **乗に比例する空気抵抗** $F = -\beta \cdot (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t))^3$ $(\beta > 0)$ **がはたらいているとする．**

1. **運動方程式を書こう．**
2. **終端速度** v_∞ **を求めよう．**

quiz 8

通常，空気抵抗の力の大きさは，速度に比例するが，仮に，速度の 3 **乗に比例する空気抵抗を受ける質量** m **の物体があったとする (比例定数を** $\beta > 0$ **とする)．座標を** x **として，物体が他に力を受けない場合の運動を運動方程式を解いて求めよう (積分定数は決定しなくてよい)．**

全体　目次　前回　次回　略解