樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2003/12/21 Sun 19:03 hig"

quiz 略解 7

1. $$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg - \beta\cdot(\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t))^3. \tag{102}$$

   $v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ とすると, $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -mg - \beta\cdot v(t)^3$ とかける.

2. $t \to +\infty$ で, $v(t) \to v_\infty$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) \to 0$ となるとすると,
   $0 = -mg - \beta\cdot(v_\infty)^3$. よって, $v_\infty = -(mg/\beta)^{1/3} < 0$.

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

quiz 略解 8

1 次元の運動なので, 時刻 t の座標を $x(t)$ とする. 運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \beta\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right|^3 \times \left\{\begin{array}{ll}(-1) & (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) > 0) \\ (+1) & (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) < 0)\end{array}\right\} = -\beta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^3.$$

$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおいて,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{\beta}{m}v(t)^3. \tag{103}$$

これは変数分離形.

$$\int \frac{1}{v^3}\mathrm{d}v = -\int \frac{\beta}{m}\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{v^2} = -\frac{\beta}{m}t + C \quad (C \text{ **は積分定数**})$$

$$v(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2\beta}{m}t - 2C}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2\beta}}\frac{1}{\sqrt{t + C_1}} \stackrel{t\to\infty}{\to} v_\infty = 0.$$

$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **なので**, **もういちど変数分離形**.

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{m}{2\beta}} \times 2 \times \sqrt{t + C_1} + C_2.$$

5. 斜面に沿う運動と摩擦力

戸田 3-2

今日の目標

- 斜面をすべる物体の運動方程式がたてられる ⇒ 垂直抗力
- 摩擦力を含む運動方程式がたてられる

以下, i, j, k は基本ベクトル (x, y, z 軸の正の向きの単位ベクトル) です. 物理数学☆演習 I 参照.

5.1 なめらかな水平面上の運動 (摩擦なし)

力を受けずになめらかな机の面をすべる運動を考える. 運動方程式は x 方向の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \rightsquigarrow x(t) = C_1 t + C_2, \tag{104}$$

あれっ, でも重力 $-mg$ がはたらいてるのでは? z 方向の運動方程式を

考えよう.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg \quad \boxed{39} \tag{105}$$

机が物体を押し返す力, $\boxed{\text{垂直抗力}}$ N がはたらいていると考える.

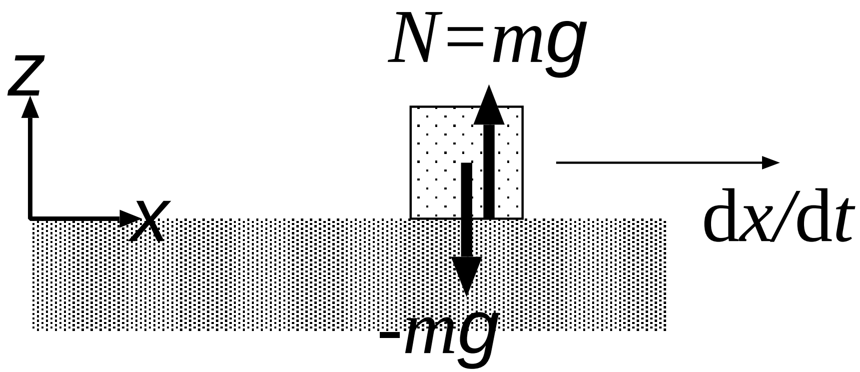
すべての時刻について $z(t) = 0$ であることから, $N = mg$ と定まる.

> 今までは, 運動方程式を使って, 与えられた力から運動を求めていた. 机のように, 運動を制限するものがあるときは, 運動から力を求める場合がある. これはその初めての例.

ベクトルを用いて,

$\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$: 重力, $\mathbf{N} = N\mathbf{k}$: $\boxed{\text{垂直抗力}}$ で書くと,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \mathbf{F} + \mathbf{N} = \mathbf{0} \tag{106}$$

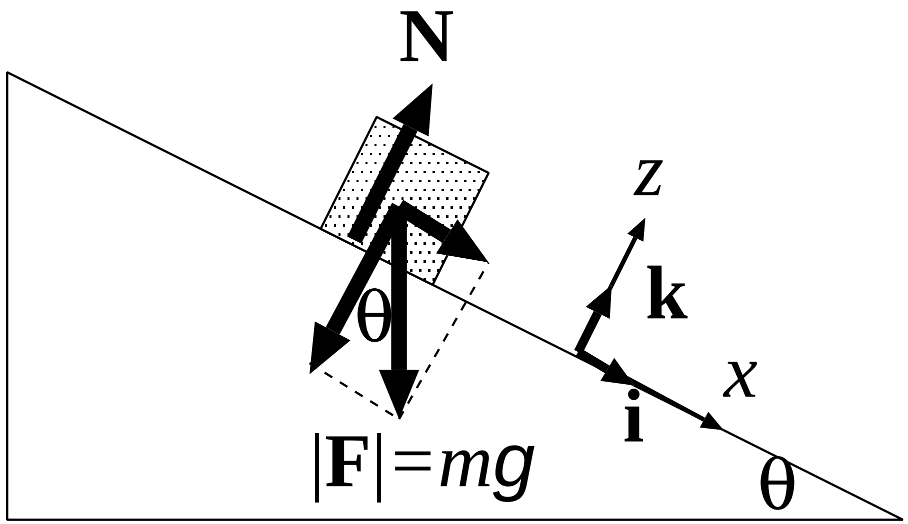


5.2 なめらかな斜面に沿う運動 (摩擦なし)

戸田 p.34-35

水平から θ だけ傾いたなめらかな斜面をすべる物体 (質量 m) を考える．図のように，x, z 軸をとる．

はたらく力は，F: 重力，N: 垂直抗力．



$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F} + \mathbf{N}. \tag{107}$$

40 　　　　なので，

$$x \text{ 方向} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = +mg\sin\theta, \tag{108}$$

$$z \text{ 方向} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\cos\theta + N. \tag{109}$$

例題 8

上の状況で, 時刻 $t=0$ に, $x=x_0$ から, 斜面に沿って上向きに速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=v_{x0}<0$ で発射したときの運動を, 運動方程式を解いて求めよう.

41

x_0, v_{x0} **を積分定数として,**

$$x(t) = \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2 + v_{x0}t + x_0, \tag{110}$$

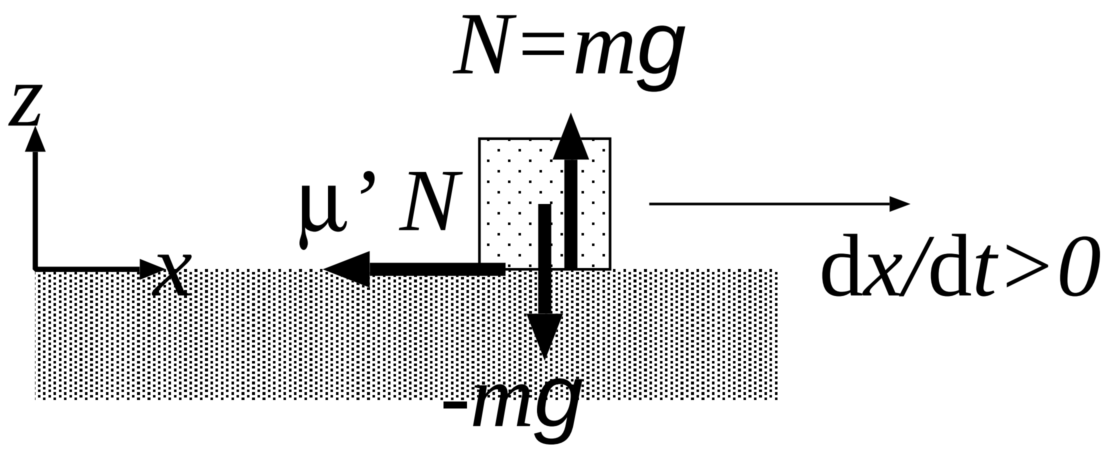
$$z(t) = 0. \tag{111}$$

5.3 粗い水平面上の運動 (動摩擦力あり)

戸田 p.36

なめらかでない (= 粗い) 面上を運動する物体は, だんだん速さが遅くなり, 最後は止まってしまう. これは, ニュートンの第 1 法則に反するように見えるが, 実は, 粗い面が物体に, すべりの摩擦の力 (動摩擦力) を及ぼしているためである.

動摩擦力は, 向きは速度の反対向き (速さを減らす), 大きさは, 垂直抗力 N の大きさに比例する. 比例定数 μ' は 動摩擦係数 とよばれ, 面の性質, 物体と面の接



する面積などによってきまる.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{cases} -\mu' N & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) > 0\right) \\ 0 & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 0\right) \\ +\mu' N & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) < 0\right) \end{cases} \tag{112}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{42 \qquad\qquad\qquad} \qquad \boxed{43 \qquad\qquad\qquad} \tag{113}$$

例題 9

水平な粗い面の上をすべる質量 m の物体を考える. 水平方向に x 軸, 鉛直方向に z 軸を取る. 時刻 $t=0$ に初速度 $(v_x, v_z) = (v_0, 0), v_0 > 0$ $\mathbf{v}(0) = v_0 \mathbf{i}, v_0 > 0$ で水平に物体を発射したところ, 一直線上を運動した. 物体にはたらく力は重力と動摩擦力だけだった. ただし, 物体と面の間の動摩擦係数を μ' とする.

1. **水平, 鉛直それぞれの方向の運動方程式をたて, 初期条件をかこう.**
2. **時刻 $t=0$ 以降の物体の運動を求めよう.**
3. **物体が静止するまでに進む距離を求めよう.**

1. **垂直抗力の大きさを N として, 運動方程式は**

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\mu' N \tag{114}$$

$$m \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + N \tag{115}$$

初期条件は, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$, $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 0, z(0) = 0\right)$.

2. **積分すると**,

$$\boxed{44} \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\mu' g \tag{116}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\mu' g t + C_1, \tag{117}$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}\mu' g t^2 + C_1 t + C_2. \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数}) \tag{118}$$

初期条件より, $\boxed{45}$ (119)

3. **物体が静止する時刻** T **は** $\boxed{46}$ **から決まり**, $T = \frac{v_0}{\mu' g}$.

$t = 0$ **から** $t = T$ **の間に物体の進んだ距離は**,

$|x(T) - x(0)| = \left| -\frac{1}{2}\mu' g \left(\frac{v_0}{\mu' g}\right)^2 + v_0 \frac{v_0}{\mu' g} + C_2 - C_2 \right| = \frac{v_0^2}{2\mu' g}$.

5.4 粗い斜面に沿う運動 (動摩擦力あり)

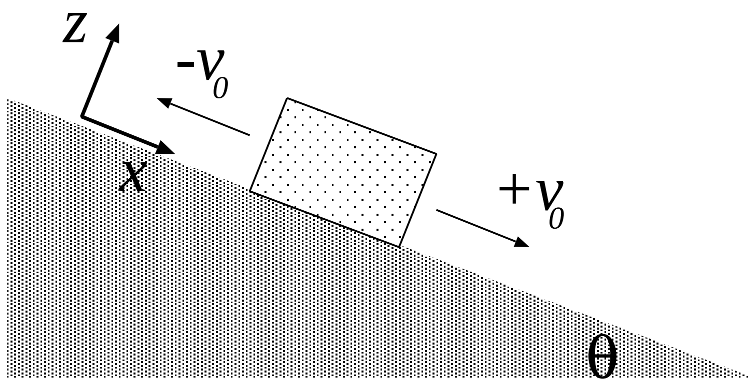
戸田 p.35

例題 10

角度 θ だけ傾いた粗い面の上をすべる質量 m の物体を考える．斜面と平行な方向に x 軸，それと垂直な方向に z 軸を取る．

時刻 $t=0$ に原点から初速度の大きさ v_0 で物体を斜面にそって下向きに発射した．物体と面の間の動摩擦係数を μ' とする．

1. x, z それぞれの方向の運動方程式をたてよう．
2. 時刻 $t=0$ 以降の物体の運動を求めよう．
3. 物体が斜面の途中で止まるための θ に対する条件を求めよう．



47

quiz 9

例題と同じ状況で, 物体を, 初速度の大きさ v_0 で斜面にそって上向きに発射した場合の運動を求めよう. 物体が止まるまでに進んだ距離を求めよう.

Hint. **運動方程式の形は例題と同じではありません.**