樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2003/12/21 Sun 19:03 hig"

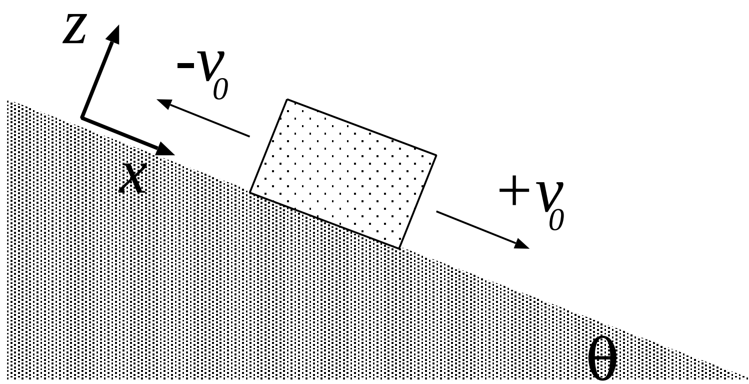
5.5 前回の quiz の略解

quiz 略解 9

垂直抗力の大きさを N として, 運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = +mg\sin\theta + \mu' N \qquad (120)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\cos\theta + N \qquad (121)$$



斜

初期条件は, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -v_0$.

面から離れない条件 $z=0$ と (121) から, $N=mg\cos\theta$. (120) に代入して解くと,

$$x(t)=\frac{1}{2}g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)t^2+C_1\cdot t+C_2. \tag{122}$$

初期条件より, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=C_1=-v_0$. 静止する時刻 $t=T$ は $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T)=0$ から

$$T=\frac{v_0}{g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)}. \tag{123}$$

と求まる.

$$|x(T)-x(0)|=\left|-\frac{v_0^2}{2g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)}\right|. \tag{124}$$

5.6 静止摩擦力

戸田 p.37

上では, 物体が動いている状況を考えた.

一方, 粗い面上に止まっている物体は, 水平方向に小さい力で押しても動き出さない. これは, 加えられた力 $\mathbf{F}$ と

大きさは 48 向きは 49

の 静止摩擦力 $-\mathbf{F}$ が働くためである. 静止摩擦力の大きさは, 加えられた力に応じて変化する.

静止摩擦力の大きさ $|\mathbf{F}|$ は, 最大でも μN である. ここで, N は垂直抗力. μ は 静止摩擦係数 とよばれる比例係数. 最大静止摩擦力より大きな力を加えて初めて, 物体は動き始める. 以後は, 動摩擦力のみが働く.

静止摩擦係数と動摩擦係数の間には, 50 という関係が成り立つ.

例題 11

静止摩擦係数 μ の斜面の傾きの角度を徐々に大きくしていったところ, 傾きの角度 θ で動き始めた. θ と μ の関係を求めよう.

51

quiz 10

静止摩擦係数 μ の水平面に, 質量 m の物体を置き, 水平方向に大きさ F の力を加えたところ, 動き出した.

力 F が加わっても動き出さないように, 物体の上に質量 M の重りを置く (接着して固定する) ことにする. 重りの質量は M はどれだけ以上である必要があるか.

6. ばねの力と単振動

今日の目標

- ばねの力を含む運動方程式が書ける.
- ばねの力を含む運動方程式が (特別な場合には) 解ける.

6.1 ばねの運動

戸田 3-3 和達 p.86

バネの先についた物体 (質量 m) の運動を考えよう.

自然長: 力が加わっていないときのバネの長さ

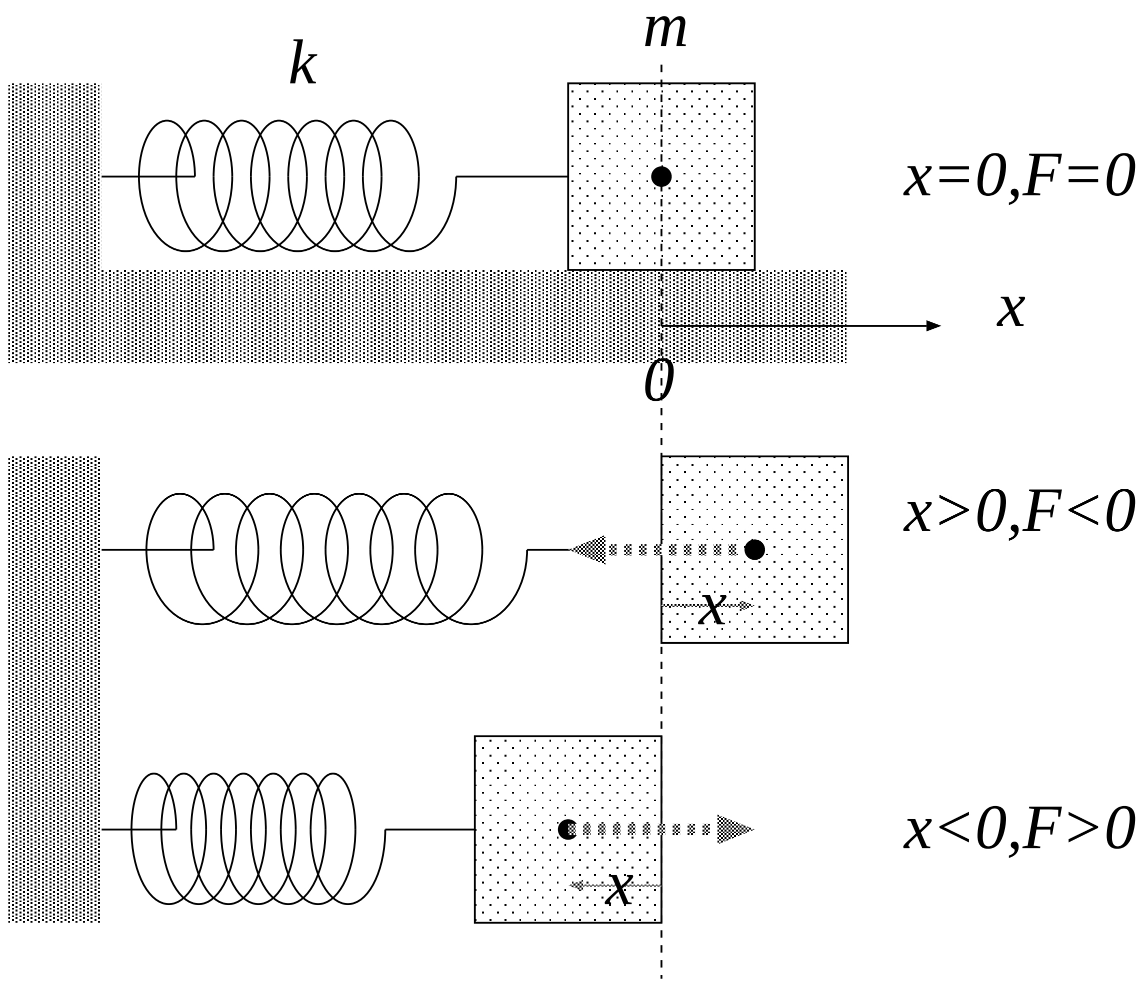
変位: $x(t) =$ (変化後のバネの長さ) $-$ (自然長)

バネの復元力 $F = -k \times x(t)$ (フックの法則)

$k > 0$: **バネ定数**. バネの強さを表す.

大きさは変位に比例. 変位を小さくするようにはたらく $\rightsquigarrow -kx(t)$

変位を小さくするようにはたらく (だからマイナス).



運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t). \tag{125}$$

すなわち

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega^2 x(t) = 0. \qquad (\omega = \sqrt{k/m}) \tag{126}$$

実は,

$$\boxed{52 \qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{127}$$

この方程式の解になっている (C_1, C_2 **は積分定数として**), **なぜなら**

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) =& \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)) \\
=& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-C_1\omega\sin(\omega t) + C_2\omega\cos(\omega t)) \\
=& -C_1\omega^2\cos(\omega t) - C_2\omega^2\sin(\omega t) \\
=& -\omega^2(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)) = -\omega^2 x(t).
\end{aligned} \tag{128}$$

実は, これ以外の解はない (**来年, 数理モデル基礎** I **で学びます**).

このような運動を **単振動 (調和振動)** **という.**

6.2 単振動 (調和振動)

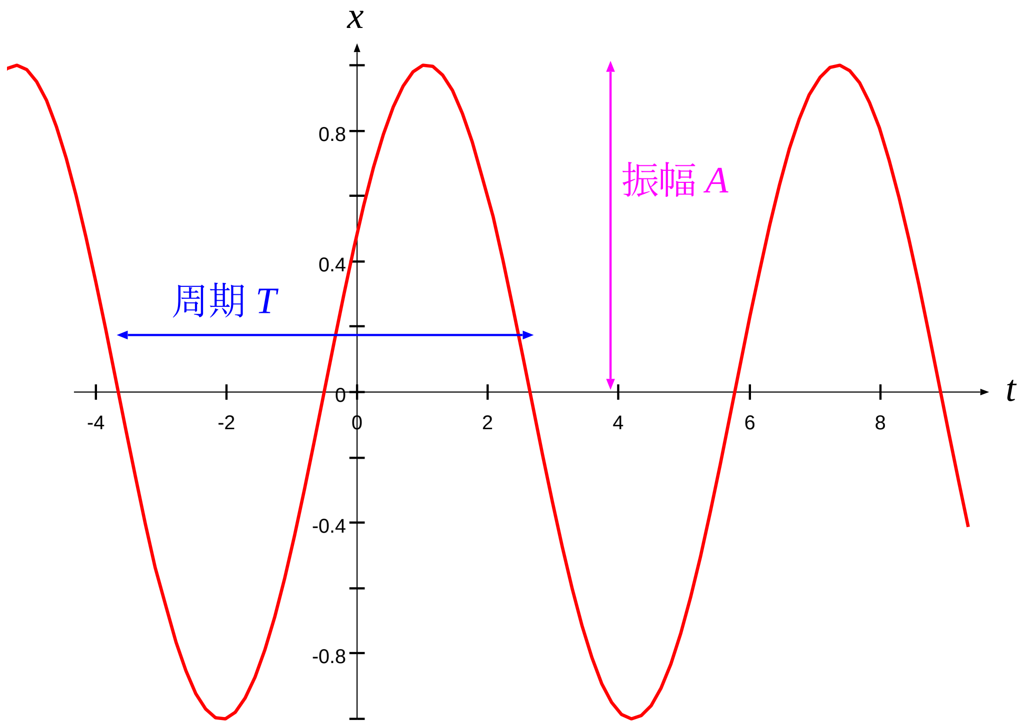
戸田 p.39

$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t = A\sin(\omega t + \theta). \qquad (129)$$

ただし, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \tan\theta = \frac{C_1}{C_2}$.

これって, **等速円運動** ($\rightarrow$ **物理数学☆演習** I) **の** x (y) **方向の運動と同じ**.

$\rightarrow$ i/V/EZ **アプリ** `http://hig3.net/`



記号	単位	名前	意味
A	[m]	53	$\lvert x(t)\rvert$ の最大値．等速円運動では 半径 R
ω	[rad/s]	角速度	単位時間あたりに回る角．
θ	[rad]	初期位相	時刻 $t=0$ における位相
$\omega t+\theta$	[rad]	位相	時刻 t における，x 軸からはかった角．
$T=2\pi/\omega$	[s]	周期	一周してもとの位置に来るまでの時間．$\omega T=2\pi$ からわかる．
$f=1/T$	[1/s]=[Hz]	振動数	単位時間に何周するかという数．単位 Hz(ヘルツ)

例題 12

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) = 0 \tag{130}$$

を考える. 積分定数を C_1, C_2 **として,**

$$x(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) \tag{131}$$

が解であることを示し, 初期条件 $x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ **から積分定数を定めよう.**

54

6.3 空気抵抗のもとでのばねの運動

和達 p.87

速度に比例する空気抵抗 $-c \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ もある場合を考えよう.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{132}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{133}$$

このときの運動を 減衰振動 という.

一般に,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + a \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + b \cdot x(t) = 0. \quad (a,b \text{ は定数}) \tag{134}$$

というタイプの微分方程式を考えよう. 和達 p.82—84

例題 13

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 3 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 2 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{135}$$

55

ここで解答をちょっと中断して考える．この 2 **つの解はどちらも初期条件を満たしていない．こまった．しかし，ここで超強力な定理．**

定理． $x_1(t), x_2(t)$ **が** (134) **の解であるとき，任意の定数** C_1, C_2 **に対して，** $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ **も** (134) **の解になっている．**

証明． $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ **に対して，**(134) **の左辺が** 0 **になればよい．**

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} =& \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(C_1 x_1 + C_2 x_2) + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C_1 x_1 + C_2 x_2) + b(C_1 x_1 + C_2 x_2) \\
=& C_1 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + b x_1\right) + C_2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + b x_2\right) \\
=& C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 \qquad (x_1, x_2 \text{ は解なので})
\end{aligned}
$$

この定理は，次の解答のようにいつでも使ってよい．

解答に戻ろう．

56

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \tag{140}$$

quiz 11

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) - 3 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = -1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 11. \tag{141}$$