樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2003/12/21 Sun 19:03 hig"

quiz 略解 10

質量 M の重りをのせてぎりぎり動き出す場合を考えると,

$$0=(m+M)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=F-\mu N, \tag{142}$$

$$0=(m+M)\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t)=N-(m+M)g \tag{143}$$

よって, $F=\mu(m+M)g$ すなわち, $M=\frac{F}{\mu g}-m$ 以上である必要がある. 問題文の前半は, $\frac{F}{\mu g}-m>0$ を保証している.

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

quiz 略解 11

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ という形の解があるか調べる．微分方程式に代入して，

$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t} + 2\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} - 3\mathrm{e}^{\lambda t} = (\lambda^2 + 2\lambda - 3)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0. \tag{144}$$

両辺を $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ で割って，

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0, \tag{145}$$

すなわち，$\lambda = 1, -3$ で，$\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-3t}$ は解．(先週の定理より) C_1, C_2 を 任意定数としたとき，$x(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-3t}$ も解．このとき，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C_1\mathrm{e}^t - 3C_2\mathrm{e}^{-3t}$．初期条件より，

$$-1 = x(0) = C_1\mathrm{e}^0 + C_2\mathrm{e}^{-3\cdot 0} = C_1 + C_2, \tag{146}$$

$$11 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = C_1\mathrm{e}^0 - 3C_2\mathrm{e}^{-3\cdot 0} = C_1 - 3C_2. \tag{147}$$

解いて，$C_1 = 2, C_2 = -3$ より，$x(t) = 2\mathrm{e}^t - 3\mathrm{e}^{-3t}$.

6.4 他のうまくいく例

'$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいてみる', は超便利．これまで出てきた他の場合にも使っちゃおう．

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t) \tag{148}$$

に $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ を代入してみる．

$$\begin{aligned} \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} &= 2\mathrm{e}^{\lambda t}. \\ (\lambda - 2)\mathrm{e}^{\lambda t} &= 0. \end{aligned}$$

任意の t について成立するためには，$\lambda = 2$ ととればいい．

$$x(t) = C\mathrm{e}^{2t} \qquad C \text{ は積分定数} \tag{149}$$

これは，変数分離形で解いた場合と一致する．

6.5 だめな例

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t) - 1 \tag{150}$$

にも使っちゃおう. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ を代入してみる.

$$\begin{aligned}\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} =& 2\mathrm{e}^{\lambda t} - 1. \\ (\lambda - 2)\mathrm{e}^{\lambda t} =& -1.\end{aligned}$$

任意の t について成立するためには, $\lambda = 2$ ととればいいというわけにはいかない. λ が 定数にならない. t に依存してしまう. おかしい.

$\rightsquigarrow$ **解は $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とは書けない.**

そういうときは, 別の方法, この場合には, 変数分離で解けばよい.

教訓 '$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいてみる' はいつでも試してみていいけど, 途中でだめとわかることもある.

7. 単振動と複素数

7.1 虚数の指数関数

'$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$' **とおく**, **は超便利**. **単振動にも使っちゃおう**. **例題** 14

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) = 0, \qquad x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0 \tag{151}$$

は, $a = 0, b = 4$ **の場合**. **やってみよう**.

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいてみる**.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t}$$

よって　$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) = (\lambda^2 + 4)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0.$$

$\lambda^2 + 4 = 0 \rightsquigarrow \lambda = \pm 2i$　(?????)

虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ は $i^2=-1$ を満たす．複素数 $x+iy$ の i.

知らん顔して計算すると,

$$x(t) = D_1 \mathrm{e}^{2it} + D_2 \mathrm{e}^{-2it}. \tag{152}$$

は解．初期条件より,

$$x(0) = D_1 \mathrm{e}^{2i0} + D_2 \mathrm{e}^{-2i0} = D_1 + D_2 = 2. \tag{153}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2iD_1 \mathrm{e}^{2it} - 2iD_2 \mathrm{e}^{-2it} \text{だから}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 2iD_1 \mathrm{e}^{2i0} - 2iD_2 \mathrm{e}^{-2i0} = 2iD_1 - 2iD_2 = 0. \tag{154}$$

ここで $\mathrm{e}^0 = 1$ を使った.

連立方程式を解いて, $D_1 = D_2 = 1$.

例題 14**の解は** $x(t) = 2\cos(2t)$ **だったはず**.

$$x(t) = 2\cos(2t) \stackrel{?}{=} \mathrm{e}^{2it} + \mathrm{e}^{-2it}. \tag{155}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -4\sin(2t) \stackrel{?}{=} 2i\mathrm{e}^{2it} - 2i\mathrm{e}^{-2it}. \tag{156}$$

したがって,

$$\frac{1}{2}\cdot(\textbf{上}) + \frac{1}{4i}\cdot(\textbf{下}) = \cos(2t) + i\sin(2t) \stackrel{?}{=} \mathrm{e}^{2it}. \tag{157}$$

$2t = \theta$ **とおくと**, **次のオイラーの公式になる**.

7.2 オイラーの公式

和達 p.10

定義. **実数** θ **に対して**

$$\boxed{\phantom{e^{i\theta}} \quad 57} \cdots \text{オイラーの公式} \tag{158}$$

定義. **複素数** $z = a + i\theta$ (a **と** θ **は実数**) **に対して,**

$$\boxed{\phantom{e^{z}} \quad 58} \tag{159}$$

3 **年で関数論を学ぶと, これで 'よい' というのが心から納得できます.**

参考: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ **の証明**.

e^x **のテイラー級数で** $x = i\theta$ **とおくと**,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \tag{160}$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \cdots \tag{161}$$

一方, $\cos\theta, \sin\theta$ **の** Taylor **展開より**,

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots \tag{162}$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots \tag{163}$$

$$i\sin\theta = i\theta - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \cdots \tag{164}$$

したがって, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

性質. **複素数** $z = x + iy, w = u + iv$ **に対して**,

$$\boxed{\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^w}$$

参考: **前半の証明**.

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z+w} &= \mathrm{e}^{x+iy+u+iv} \\
&= \mathrm{e}^{(x+u)+i(y+v)} \\
&= \mathrm{e}^{x+u}\mathrm{e}^{i(y+v)} \\
&= \mathrm{e}^{x+u}(\cos(y+v) + i\sin(y+v)) \\
&= \cdots (\text{加法定理}) \cdots = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^u\mathrm{e}^{iy}\mathrm{e}^{iv} \\
&= \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^w
\end{aligned} \qquad (165)}$$

性質. **複素数** $z = x + iy$, **整数** n **に対して**,

$$\boxed{(\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{zn}}$$

例題 14

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 9x(t) = 0. \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 3. \tag{166}$$

を, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ は一般には複素数) とおくことによって解こう.

59

60

7.3 複素平面と複素数の極表示

和達 p.7–11

i アプリ/V アプリ/EZ アプリ `http://hig3.net`

61

62

63

64

例題 15

$z = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i}$ とおく．z, z^2, z^{100}, $1/z$ の実部, 虚部を求めよう．

すみません．この例題は時間不足のため省略します．似た例題を次回にやっています．

65

$z = x + iy$ は足し算が得意．$z = \mathrm{e}^{a+i\theta}$ は掛け算が得意．

quiz 12

$z_1 = -\sqrt{3} + i$ の絶対値と偏角を求めよう. $z_2 = \mathrm{e}^{2-\frac{\pi}{6}i}$ の実部と虚部を求めよう.

quiz 13

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 16x(t) = 0, \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -8. \tag{171}$$

を, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ は一般には複素数) とおくことによって解こう.

冬のプチテストやります!

12 月 12 日 (金) 今回は微積分のテストとずれてます. このプチテストの成績は, 科目の成績 100 点のうち 25 点分にあたります.

特別講義 担当は四ツ谷先生です.

日時 12 月 9 日 (火)16:50–18:20

場所 1 号館 107 教室

講演題目 (最新の PC, 携帯電話, デジタルカメラの高密度実装技術を中心とした分かりやすく面白い話)

講演者 辻 昭久氏（ツジコー株式会社）

特別講義は, 卒業要件単位に数えられる科目です. 2003 年度履修要項版 p.268.

学外の講師を招いて年間 3 回程度 (各回 1 コマ) 行われる独立の講義に出席してレポートを提出し, 卒業までに計 6 回以上合格すると単位が認定されます. 学年に関係なく参加できます. 積極的に参加することをお勧めします.

履修登録は 4 年次前期に行います. したがって, 1 年次のみなさんは, 特に登録せずに講義に参加してください.