樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2003/12/21 Sun 19:03 hig"

7.4 前回の quiz の略解

quiz 略解 12

$|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. 図を描いてみると, $z_1 = 2(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi)$ と書けるので, $\arg z_1 = \frac{5}{6}\pi$.

$z_2 = \mathrm{e}^2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}i} = \mathrm{e}^2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) = \frac{\mathrm{e}^2}{2}(\sqrt{3} - i)$. よって,

$\operatorname{Re} z_2 = \frac{\mathrm{e}^2\sqrt{3}}{2}, \operatorname{Im} z_2 = -\frac{\mathrm{e}^2}{2}$.

---

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

quiz 略解 13

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 16x(t) = 0, \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 8. \tag{172}$$

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ **は定数**) **を代入してみると**,

$$(\lambda^2 + 16)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{173}$$

両辺を $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ **で割ると**,

$$(\lambda + 4i)(\lambda - 4i) = 0. \qquad (i^2 = -1) \tag{174}$$

解くと, $\lambda = \pm 4i$. **よって**, $x(t) = C_1 \mathrm{e}^{+4it} + C_2 \mathrm{e}^{-4it}$ **は解** (C_1, C_2 **は任意の定数**) **これを初期条件に代入すると**,

$$x(0) = 0 = C_1 + C_2 \tag{175}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -8 = 4iC_1 - 4iC_2 = 4i(C_1 - C_2) \tag{176}$$

この連立方程式を解くと $C_1 = +i, C_2 = -i$. **初期条件を満たす解は**

$$\begin{aligned} x(t) =& + i\mathrm{e}^{4it} - i\mathrm{e}^{-4it} \\ =& + i(\cos 4t + i \sin 4t) - i(\cos(-4t) + i \sin(-4t)) \\ =& + i(\cos 4t + i \sin 4t) - i(\cos 4t - i \sin 4t) \\ =& i2i \sin 4t = -2 \sin 4t. \end{aligned} \tag{177}$$

これは微分方程式と初期条件を確かに満たしている.

楽な計算法

$$\mathrm{e}^{+i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{178}$$

$$\mathrm{e}^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \tag{179}$$

$\frac{1}{2}$(上) $+$ $\frac{1}{2}$(下) より　$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \tag{180}$$

$\frac{1}{2i}$(上) $-$ $\frac{1}{2i}$(下) より　$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i} \tag{181}$$

これを使うと，上の解答の第 1 行でいきなり，

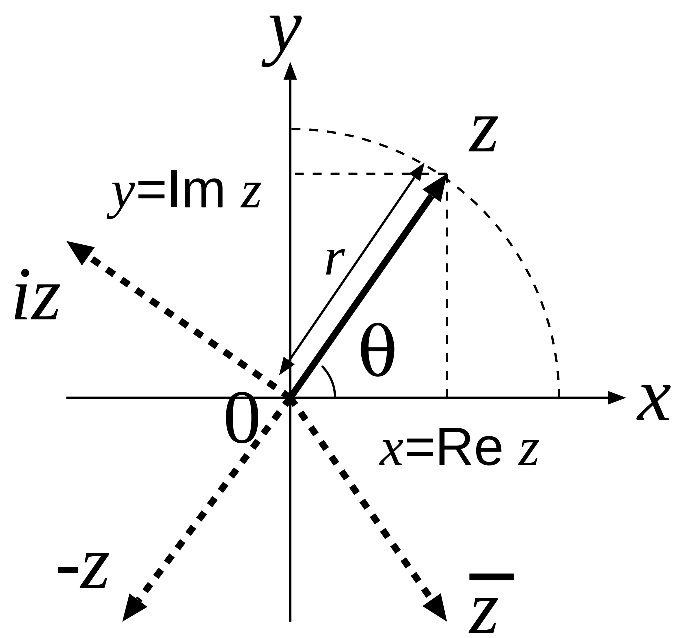
$$x(t) = +i\mathrm{e}^{4it} - i\mathrm{e}^{-4it} = 2i \times i \times \frac{\mathrm{e}^{4it} - \mathrm{e}^{-4it}}{2i} = -2\sin 4t \tag{182}$$

とわかる．おぼえる価値あるよ．

7.5 複素数のまとめ

x, y, r, θ **は実数**, $r \geq 0$.

		実/虚部表示	極表示
複素数	z	$= x + iy$	$= r\mathrm{e}^{i\theta}$
実部	$\mathrm{Re}\, z$	$= x$	$= r\cos\theta$
虚部	$\mathrm{Im}\, z$	$= y$	$= r\sin\theta$
絶対値	$\lvert z\rvert$	$= \sqrt{x^2+y^2}$	$= r (\geq 0)$
$\boxed{\text{偏角}}$	$\arg z =$		θ
			$(\tan\theta = \frac{y}{x})$
複素共役	$\bar{z}$	$= x - iy$	$= r\mathrm{e}^{-i\theta}$



複素平面

横軸に実部 x, **縦軸に虚部** y **を描いたもの**

いくつかの公式

(どうせ定義に戻ればすぐに導けるけど, おぼえると楽かも)

$z = x + iy = r\mathrm{e}^{i\theta}$, $(x, y, r, \theta$ **は実数**.)

e^z の性質.

$$\mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{2\pi i} = 1, \mathrm{e}^{\pi i} = -1. \tag{183}$$

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x, \text{特に } |\mathrm{e}^{iy}| = 1. \tag{184}$$

$$\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\bar{z}}, \text{特に } \overline{\mathrm{e}^{iy}} = \mathrm{e}^{-iy}. \tag{185}$$

微分積分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{zt} = z\mathrm{e}^{zt}. \tag{186}$$

$$\int \mathrm{e}^{zt}\mathrm{d}t = \frac{1}{z}\mathrm{e}^{zt} + C. \tag{187}$$

オイラーの公式を逆に解いたもの

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}, \tag{188}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}, \tag{189}$$

複素共役, -1 倍, 逆数.

$$\bar{z} = \overline{r\mathrm{e}^{i\theta}} = r\mathrm{e}^{-i\theta}, \tag{190}$$

$$-z = -r(\mathrm{e}^{i\theta}) = r\mathrm{e}^{i(\theta+\pi)}, \tag{191}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta} \tag{192}$$

例題 16

$z = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\pi i}$, $w = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{12}\pi i}$ とおく. z, z^{100}, $1/z$, zw の実部, 虚部を求めよう.

66

8. 単振動と減衰振動

8.1 単振動

例題 17

質量 $m=2$, ばね定数 $k=8$ のばねがあり, 自然長の位置を x 軸の原点 $x=0$, のびる方向を x 軸の正の向きとする. 時刻 $t=0$ に, 自然長から $x(0)=4$ だけのばし, 速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=8$ で発射したとする. 運動を求め, 横軸 t 縦軸 x でグラフを描こう. 単振動の角速度と振幅を求めよう. 最初に自然長に戻る時刻を求めよう.

67

68

8.2 特性方程式と解の分類

$$a \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + c \cdot x(t) = 0. \quad (b,c \text{ は定数}) \tag{193}$$

という微分方程式は, a, b, c の値に応じて異なるタイプの解を持つ.

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて代入.

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{194}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{195}$$

これは λ をきめる 2 次方程式. $\cdots\cdots$ 69 という.

70 $D = b^2 - 4ac.$ (196)

解は, D の値によって分類される.

$D > 0$ のとき 和達 p.83(i)

2 実根.

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\alpha t} + C_2 \mathrm{e}^{\beta t}. \qquad (\alpha, \beta \text{は実数}) \tag{197}$$

というタイプの解. 前にも出てきた.

$D < 0$ のとき 和達 p.83(ii)

互いに複素共役な 2 複素根. $\lambda = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2} = \mu \pm i\omega$.

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{(\mu + i\omega)t} + C_2 \mathrm{e}^{(\mu - i\omega)t} \qquad (\mu, \omega \text{は実数}) \tag{198}$$

下で例で見ます.

なお, 単振動は $\mu = 0$ となる特別の場合.

$D = 0$ のとき 和達 p.84(iii)

重根. $D > 0$ と $D < 0$ の境い目. 来年数理モデル基礎 I でやります.

例題 18

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 5\cdot x(t) = 0, \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -1. \tag{199}$$

を解いて, $x(t)$ **のグラフを描こう**.

71

72

quiz 14

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+5x(t)=0,\quad x(0)=2,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-6 \tag{204}$$

を解いて, $x(t)$ **のグラフを描こう**.

冬のプチテストやります! 12 月 12 日 (金). このプチテストの成績は, 科目の成績 100 点のうち 25 点分にあたります.

補講やります! すみません. 12 月 25 日 (木) 1 講時. 1-107 です. 曜日が違うことに注意してね.

全学アンケートやります! 授業後半の 15 分程度ご協力ください. このアンケートは成績には関係ありません. 公表されるのは個人が特定できないデータのみです.

Q13 個別問題 1 の問と選択肢 物理数学☆演習 II の演習部分について, あなたの意見と一致するものをマークしてください.

1. 演習はなくしたほうがよい.
2. 演習の時間を短くしたほうがよい.
3. 講義と演習の時間の現在の比率は適切である.
4. 演習の時間を長くしたほうがよい.

5. 微積分, 線形代数のように, 1 コマの演習があることが望ましい.

$\boxed{\text{Q14 個別問題 2 の問と選択肢}}$ 物理数学☆演習 II の Web ページについて教えてください. 該当するもののうち, もっとも番号の大きいものをマークしてください.

1. Web ページがあることを知らなかった.
2. 存在は知っているが, 見に行ったことがない.
3. 見に行って, プリントを印刷した.
4. 見に行って, アニメーションを見た.
5. 見に行って, i アプリ/Java アプリ/EZ アプリをダウンロードした.

$\boxed{\text{Q15 個別問題 3 の問と選択肢}}$ 主に使っている携帯電話を教えてください.

1. DoCoMo の 503i 以降 または FOMA.
2. Vodafone または J-Phone

3. au の A3000 番台, A5000 番台.
4. DoCoMo の 201i 番台, 251i 番台, au の 1000 番台, その他 Java アプリケーションの動作しない携帯電話, PHS.
5. 携帯電話は使っていない.