樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2003/12/21 Sun 19:04 hig"

プチテスト解答の訂正

1.2 です．ごめんなさい．最終的な答は同じです．

誤 $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = t^2 \int \mathrm{d}t + C$, 正 $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t + C$

8.3 前回の quiz の略解

quiz 略解 14

$$\begin{aligned} x(t) =&(1+i)\mathrm{e}^{(-2+i)t} + (1-i)\mathrm{e}^{(-2-i)t} \\ =&2\mathrm{e}^{-2t}(\cos t - \sin t) = -2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-2t}\sin(t - \tfrac{\pi}{4}) \end{aligned} \tag{205}$$

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

今日の目標

- 音を立てずにドアが速く閉まるようにばねを調節できる.
- 鉛直方向のばねも単振動することがわかる.

8.4 過減衰と減衰振動

和達 p.87,88

ばね定数 k のばねの力 $-kx(t)$ と, 速度に比例する空気抵抗 $-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とがある場合を考えよう $(k,\gamma > 0)$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\cdot x(t) - \gamma\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{206}$$

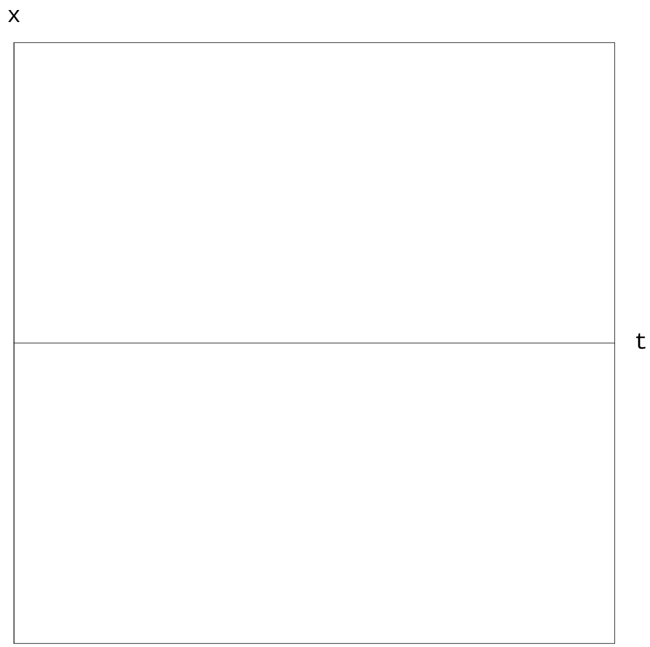
$$\iff m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \gamma\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + k\cdot x(t) = 0. \tag{207}$$

一般に,

$$a \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + c \cdot x(t) = 0. \quad (a, b \text{ は定数}) \tag{208}$$

というタイプの微分方程式を解くのに, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおくと** λ **に対する** **特性方程式** $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ **が得られ, この** 2 **次方程式の判別式** $D = b^2 - 4ac$ **の符号により, 微分方程式の解のタイプも変わるのだった.**

$D > 0$ のとき $D = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{mk} < \gamma.$ 73



抵抗 γ **が大きいとき. アニメ**

2 **実根.** $\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - mk}}{2} =$

$\alpha, \beta < 0.$

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\alpha t} + C_2 \mathrm{e}^{\beta t}. \tag{209}$$

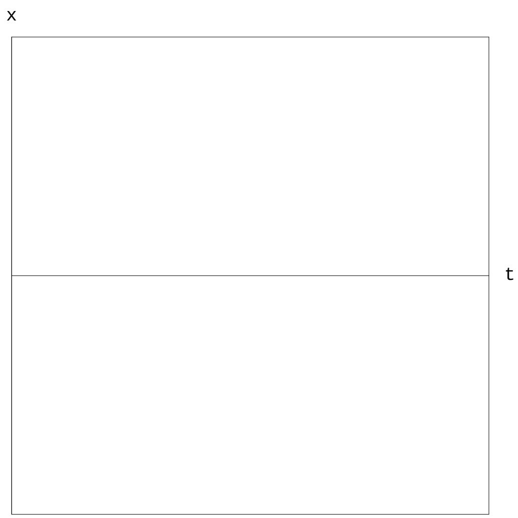
$D<0$ のとき $D = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow \gamma < 2\sqrt{mk}$ 74

抵抗が小さいとき．アニメ

互いに複素共役な 2 複素根.

$\lambda = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2} = \frac{-\gamma \pm i\sqrt{mk-\gamma^2}}{2} = \mu \pm i\omega, \mu < 0.$

$$
\begin{aligned}
x(t) =& C_1 \mathrm{e}^{(\mu+i\omega)t} + C_2 \mathrm{e}^{(\mu-i\omega)t} = \mathrm{e}^{\mu t}(C_1 \mathrm{e}^{i\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-i\omega t}) \\
=& \mathrm{e}^{\mu t}((C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t) \\
=& \mathrm{e}^{\mu t}(D_1 \cos\omega t + D_2 \sin\omega t)
\end{aligned}
\tag{210}
$$



単振動 $\Longleftrightarrow \gamma = 0 \Longleftrightarrow D = -mk < 0, \mu = 0.$

減衰振動の中の特別な場合 (減衰しない場合)

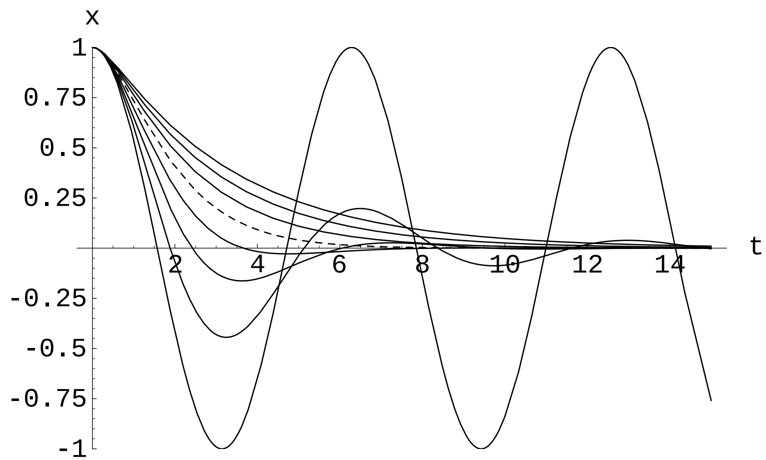
$D=0$ のとき

$$D=b^2-4ac=0 \Leftrightarrow \gamma=2\sqrt{mk}$$

重根．過減衰と減衰振動の境い目．

来年数理モデル基礎 I でやります．臨界制動といいます．

全部をまとめて描いた図

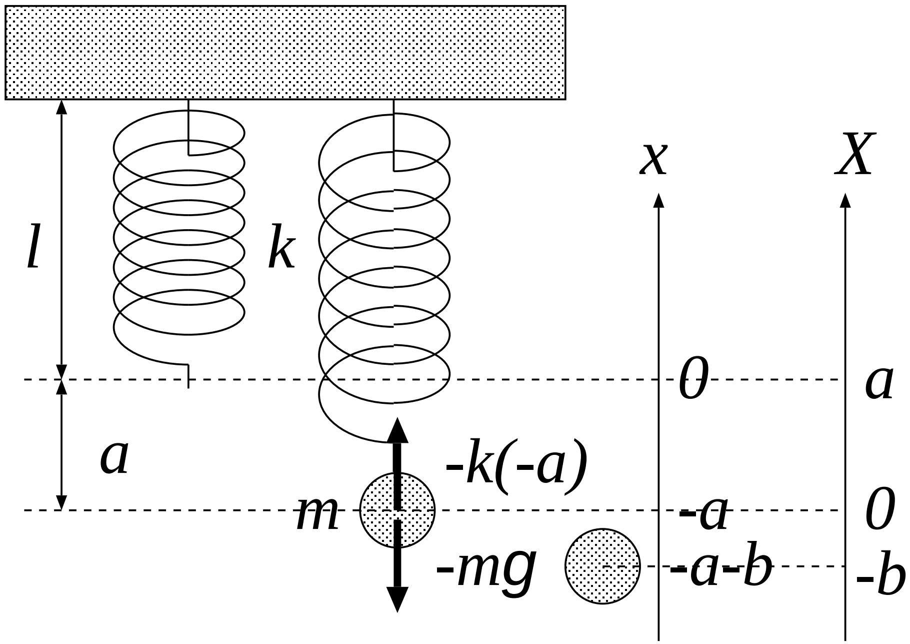


9. 単振動の応用

自然長 l, ばね定数 k, 質量の無視できるばねを重力 (重力加速度 g) のもとで天井から鉛直方向につるす.

質量 $=0$ なので, ばねの下端は, 天井から自然長だけ離れる. 下端を原点として, 上向きを正に x 座標をとる.

ここで, 質量 m の物体をばねに取りつける.



物体の運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - mg. \tag{211}$$

ばねがのびて物体が静止したときの位置は?

ばねが a だけのびたとすると, 物体の位置は $x = -a$. このときに, 静止している, つまり加速度が 0 だから,

75

(212)

さらに b だけ引っ張って静かに離したときの運動は?

$$\text{運動方程式} \quad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - mg. \tag{213}$$

$$\text{初期条件} \quad x(0) = -a - b, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{214}$$

単振動だから, $x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいて** (213) **の解を探してみよう** (?)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{k}{m}x(t)+g=0. \tag{215}$$

$$\left(\lambda^2+\frac{k}{m}\right)\mathrm{e}^{\lambda t}+g=0. \tag{216}$$

$\lambda=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$ **ではない!**

$x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ **という形の解はない**.

うまい方法

x 座標の原点を, $x=-a$ に変更したものを考える. この座標を X とかくことにしよう: $x = X - a$.

時刻 t での物体の位置を $X(t)$ と書くと,

$$\text{運動方程式} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{\text{76} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}. \tag{217}$$

$$\text{初期条件} \quad X(0) - a = -a - b, \quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{218}$$

すなわち,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\left(X(t) - \frac{mg}{k}\right) - mg. \tag{219}$$

$$\text{整理して} \quad \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}X(t) = 0. \tag{220}$$

$$X(0) = -b, \quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{221}$$

この $X(t)$ **について** $X(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいてみると**,

$$\left(\lambda^2+\frac{k}{m}\right)\mathrm{e}^{\lambda t}=0 \qquad \text{よって} \tag{222}$$

77

よって,

$$X(t)=C_1\mathrm{e}^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}t}+C_2\mathrm{e}^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \tag{223}$$

は解. 初期条件より, $C_1=C_2=-b/2$. **よって**,

$$X(t)=-\frac{b}{2}\left(\mathrm{e}^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}t}+\mathrm{e}^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right)=-b\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{224}$$

$x(t)$ **の方で書くと**,

$$x(t)=X(t)-a=-a-b\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{225}$$

きょうの教訓: うまい座標系 (原点) をとるとうまくいく

もう少し堅実な人のための方法

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}x(t) + g = 0 \tag{226}$$

元凶は左辺の g. これを, $x(t)$ に取り込んで,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right) = 0 \tag{227}$$

として, $\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right)$ をかたまりだと思おう.

第 1 項 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ は, このかたまりでかけてない. しかし, 運良く

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{228}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) \tag{229}$$

なので,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x(t)+\frac{mg}{k}\right)+\frac{k}{m}\left(x(t)+\frac{mg}{k}\right)=0 \tag{230}$$

とかける．そこで，かたまりを

$$X(t)=\left(x(t)+\frac{mg}{k}\right)=x(t)+a \tag{231}$$

とおいて,

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{k}{m}X(t)=0 \tag{232}$$

を解けばよい.

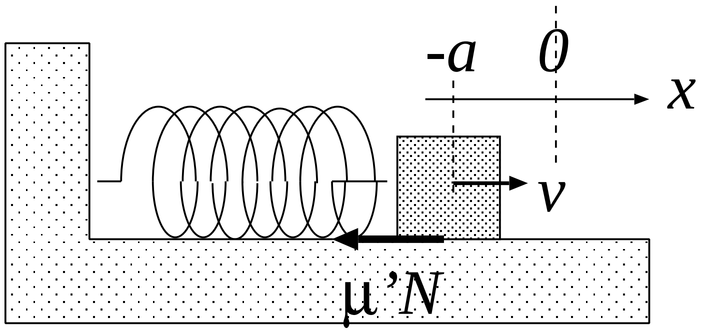
例題 19

質量 m の物体が, ばね定数 k のばねにつながれて, 水平面上に置かれている. 重力加速度を g とする.

面と物体の間の動摩擦係数を μ' とする. 面と物体の間の静止摩擦力は考えない.

ばねを自然長から $a(>0)$ だけ押し縮めて静かに手を離した. 自然長の位置を原点, 右向きに正に x 軸をとる.

ばねがのびて物体が一瞬静止するまでの運動を求めよう.



78

79

quiz 15

次の微分方程式を解こう．積分定数は決定しなくてよい．

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) - 12 = 0 \tag{233}$$

quiz 16

質量 $m=1$ の物体が，ばね定数 $k=4$ のばねにつながれ，水平面上に置かれている．物体は速さに比例する空気抵抗 (比例定数 $\gamma=5$) を受ける．

壁の位置を $x=0$ とするような x 座標をとると，ばねが自然長のときの物体の位置は $x=3$ だった．

1. 物体の位置 $x(t)$ についての運動方程式をたてよう．
2. 時刻 $t=0$ に，物体を $x=\frac{9}{4}$ の位置において，静かに手を放した．物体の運動 $x(t)$ を求めよう．

補講あります! 2003/12/25(木) 1 講時．冬のプチテスト返却はこのころになります．

ファイナルトライアルあります! 2004/01/23(金) 1 講時．これは科目の成績 50 点分に相当します．