全体	目次	前回	次回	略解

樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2004/01/09 Fri 11:17 hig"

ファイナルトライアル

2003/01/23(金)1 講時. 科目の成績は 100 点= quiz 10 + 秋のプチテスト 15 + 冬のプチテスト 25 + ファイナルトライアル 50.

9.1 前回の quiz の略解

quiz 略解 15

$X(t) = x(t) - 3$ とおくと,

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4X(t) = 0 \tag{234}$$

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

$X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおくと, $\lambda = \pm 2i$ となり,

$$X(t) = C_1 \mathrm{e}^{2it} + C_2 \mathrm{e}^{-2it} = D_1 \cos(2t) + D_2 \sin(2t). \tag{235}$$

$$x(t) = X(t) + 3 = D_1 \cos(2t) + D_2 \sin(2t) + 3. \tag{236}$$

これは (原点のずれた) 単振動.

quiz 略解 16

運動方程式は

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k(x(t) - 3) - \gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{237}$$

すなわち,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 5 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 4x(t) - 12 = 0. \tag{238}$$

定数項 -12 を吸収するために $X(t) = x(t) - 3$ とおくと,

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) + 5 \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t) + 4X(t) = 0 \tag{239}$$

$X(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおくと**, $\lambda=-1,-4$ **となり**,

$$X(t)=C_1\mathrm{e}^{-4t}+C_2\mathrm{e}^{-t}.\quad x(t)=X(t)+3=C_1\mathrm{e}^{-4t}+C_2\mathrm{e}^{-t}+3. \tag{240}$$

初期条件より $C_1=1/4, C_2=-1$ **で**,

$$x(t)=\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-4t}-\mathrm{e}^{-t}+3. \tag{241}$$

これは (**原点のずれた**) **過減衰**.

10. エネルギー保存則と位置エネルギー

戸田 3-4

10.1 エネルギー保存の例

戸田 p.46,47

例題 20

ばねの運動を表わす運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) \tag{242}$$

の, 初期条件 $x(0) = A$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = \sqrt{\frac{k}{m}}B$ **のもとでの解は,**

$$x(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \tag{243}$$

である. このことを確かめ, この解 $x(t)$ **に対して, 量**

$$\frac{1}{2}m\left(\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}k\cdot(x(t))^2 \tag{244}$$

を求めよう.

80

10.2 力学的エネルギーの保存 (1 次元)

戸田 p.43-45

位置 x だけで決まる力 $F(x)$ を受けて 1 次元の運動をする, 質量 m の質点を考えよう.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F(x(t)). \tag{245}$$

あてはまる例 **ばねの力.**

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t). \quad \text{すなわち} \quad F(x) = -k \cdot x. \tag{246}$$

そうでない例 **空気抵抗を受けるばね. 力 F は, x と v の関数.**

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t) - \gamma \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{247}$$

時間 t に ($x(t)$ を通さず) 依存する力 $F(x,t)$ もそうでない例. たとえば時間的にばね定数が変化するばね $F(x,t) = -k(t)x$.

(245) で $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおくと,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = F(x(t)). \tag{248}$$

誰かが思いついた超絶技巧. 両辺に $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ をかける.

$$mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{249}$$

$$\int mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t = \int F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \tag{250}$$

左辺で変数変換 $t \to v(t)$, 右辺で変数変換 $t \to x(t)$.

$$\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \text{ より}, \text{左辺} = \int mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv^2 + C_1. \tag{251}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \text{ より}, \text{右辺} = \int F(x)\mathrm{d}x. \tag{252}$$

関数 $U(x)$ **を，力** $F(x)$ **から**

$$\boxed{U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x'} \tag{253}$$

で定義する．このとき，

$$\frac{1}{2}mv^2 + C_1 = -U(x) + U(0) + C_2. \tag{254}$$

すなわち $$\boxed{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x(t)) = E.(\textbf{一定})} \tag{255}$$

が示される．

第 1 項 $\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2$ **を質点の** $\boxed{81\qquad\qquad}$ **という．**

(253) **で定義される第 2 項** $U(x)$ **を質点の** $\boxed{82\qquad\qquad}$ **，**
または $\boxed{\text{ポテンシャル (エネルギー)}}$ **という．**

両者の和 E **は** $\boxed{\text{力学的エネルギー}}$ **．単位**:kg·m/s^2·m=N·m=J(**ジュール**)

式 (255) は, 力 $F(x)$ のもとで 1 次元を運動する質点の力学的エネルギー E は一定で変化しないことをいっている．これを,

力学的エネルギーは [83]，力学的エネルギーは [84] である, 力学的エネルギーは不変である

などという．例題 20 で計算した一定な量は力学的エネルギーである．一般に, 力 F が, ある関数 U を用いて,

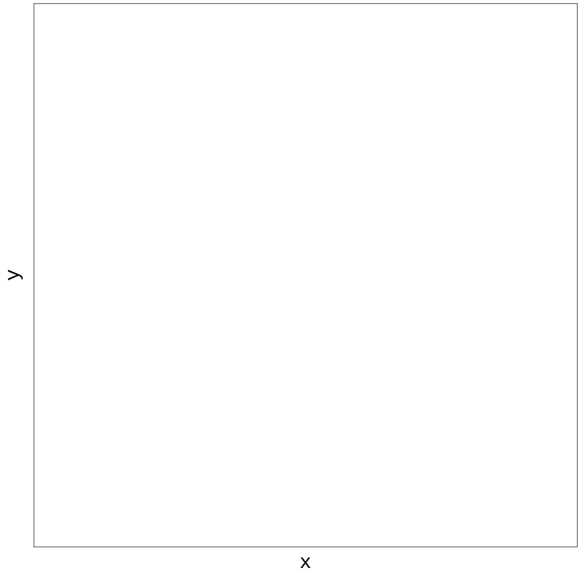
$$\boxed{F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x)} \qquad (256)$$

$$U(x) \underset{-\int \mathrm{d}x}{\overset{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{\rightleftarrows}} F(x)$$

と書けるとき, そのような力は **保存的** であるといい, 関数 $U(x)$ のことをポテンシャルまたは位置エネルギーと呼ぶ.

例 **重力のもとでの鉛直方向の運動**. **戸田 p.46**

高さを x **とかく**. $F(x)=-mg.$

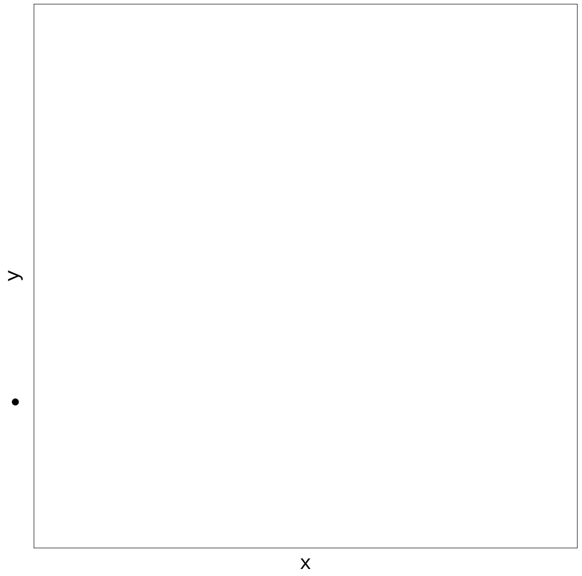


$$U(x)=-\int_0^x F(x')\,\mathrm{d}x'=-\int_0^x -mg\,\mathrm{d}x'=mgx.$$

保存則　$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2+mgx(t)=E($**一定**$).$

例 **ばねの力のもとでの運動**. **戸田 p.47**

自然長からの変位を x. $F(x)=-kx.$



$$U(x)=-\int_0^x F(x')\mathrm{d}x'=-\int_0^x(-kx')\mathrm{d}x'=\frac{1}{2}kx^2.$$

保存則　$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2+\frac{1}{2}k(x(t))^2=E($**一定**$).$

例題 21

ポテンシャルが $U(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$ であるとき, 質点が受ける力 $F(x)$ を求めよう.

85

例題 22

ばね定数 k のばねに取りつけられた, 質量 m の質点を考える. 自然長の位置を原点として, 時刻 t における位置を $x(t)$ とする.

$$x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = V \tag{257}$$

である場合, ばねののびの最大値を求めよう.

86

$U(x)$ には, 定数の不定性がある

$U(x)$ の定義 (253) では, 下端を $x=0$ としたが, 任意の $x=x_0$ としてよい. このとき, $U(x)$ は定数だけ変化する.

$$
\begin{aligned}
U_{\text{new}}(x) &= -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' \\
&= -\int_{0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' - \int_{x_0}^{0} F(x')\mathrm{d}x' \\
&= U(x) + (\text{定数})
\end{aligned}
\tag{258}
$$

つまり $U(x)+C$ が位置エネルギーと思ってもよい.

どうせ微分して力 $F(x)$ を求めたら変わんないしー.

quiz 17

1 次元を運動する質点にはたらく力が $F(x) = -x - x^3$ であるとき, ポテンシャル $U(x)$ を求めよう.

quiz 18

ばね定数 k のばねに取りつけられた, 質量 m の質点を考える. 自然長から $x_0 (> 0)$ だけ引きのばして, 静かに手を放した. 自然長に戻ったときの速さを, 力学的エネルギー保存則を用いて求めよう.