樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2004/01/09 Fri 11:41 hig"

10.3 前回の quiz の略解

quiz 略解 17

ポテンシャル $U(x)$ は,

$$U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = \int_0^x (x' + {x'}^3)\mathrm{d}x' = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x^4. \tag{259}$$

x' は積分変数で, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ ではありません.

quiz 略解 18

変位を x, 速度を $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ とすると位置エネルギーは $\frac{1}{2}kx^2$ なので, 力学

---

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

的エネルギー保存則は,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad (\text{一定}) \tag{260}$$

静かに $(v = 0)$ 手を離した瞬間に, この式は

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = E. \tag{261}$$

自然長に戻った $(x = 0)$ 瞬間の速度を v_0 とすると, この式は

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k \cdot 0^2 = E \tag{262}$$

定数 E を消去すると,

$$v_0 = \pm x_0\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{263}$$

最初にもとの長さに戻ったときには $v_0 < 0$ なので, $v_0 = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$. 速さは $|v_0| = x_0\sqrt{\frac{k}{m}}(> 0)$.

力学的エネルギー保存則を使わない解き方

運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t). \tag{264}$$

を解く. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいて** $\cdots$ (**中略**)$\cdots$ C_1, C_2 **を積分定数として**,

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{i\sqrt{k/m}\,t} + C_2\mathrm{e}^{-i\sqrt{k/m}\,t}. \tag{265}$$

初期条件 $x(0) = x_0$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ **より**,

$$x(t) = \frac{x_0}{2}\mathrm{e}^{i\sqrt{k/m}\,t} + \frac{x_0}{2}\mathrm{e}^{-i\sqrt{k/m}\,t} = x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t. \tag{266}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t. \tag{267}$$

最初に $x(t) = 0$ **となる時刻は** $\sqrt{\frac{k}{m}}t = \frac{\pi}{2}$ **より**, $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\right) = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{\pi}{2} = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}.\text{速さは}\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\right)\right| = x_0\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{268}$$

10.4 仕事とポテンシャル

$U(x)$ は '仕事'

戸田 p.64

質点が, 一定の力 F をうけて, x_0 から x_1 まで動いたとする. このとき,

$$\boxed{W = F \times (x_1 - x_0) = F \times \Delta x} \tag{269}$$

を, 力 F のした 仕事 という.

力の向きと移動方向が同じなら $W > 0$, 逆なら $W < 0$.

W が大きいほど, 力 (出してる人) は仕事が多くてたいへん, という感じ.
力が x の関数 $F(x)$ である場合には

$$W = \sum_i F(x_i)\Delta x \rightsquigarrow W = \int_{x_0}^{x_1} F(x')\mathrm{d}x' \tag{270}$$

となる. 単位:=N·m=J(ジュール) でエネルギーと同じ.

位置エネルギーと仕事の関係

力 $F(x)$ に抗して, $(-F+($ちょっとの力$))$ で質点を x_0 から x_1 まで運ぶときにする仕事は,

$$W=\int_{x_0}^{x_1}-F(x')\mathrm{d}x'=-\int_0^{x_1}F(x')\mathrm{d}x'+\int_0^{x_0}F(x')\mathrm{d}x'=U(x_1)-U(x_0). \tag{271}$$

つまり, 位置エネルギーの差だけの仕事が必要.

また, 位置エネルギー

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' = \int_{x}^{x_0} F(x')\mathrm{d}x' \tag{272}$$

は, $\boxed{\text{仕事}}$ という言葉を使うと, 次のように解釈できる.

- 力 F に抗して, 自分で $(-F + (\text{ちょっとの力}))$ を使って x_0 から x まで運ぶとする. そのときにしなければならない仕事が $U(x)$. なので, 位置エネルギーが大きい場所は, 行くのにたくさん仕事が必要.
- 力 $F(x)$ をうけて x から x_0 まで移動するときに, 力がする仕事が $U(x)$. 逆に, すでに x にある質点には $U(x)$ だけの仕事をする能力 ($\rightsquigarrow$ ポテンシャルエネルギー) がある.

quiz 19

1 次元を運動する質点にはたらく力が $F(x) = -x - x^3$ であるとき, ポテンシャル $U(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ である. この力に抗して, $-F(x)$ の力で質量 m の質点を $x = -1$ から $x = 2$ に運ぶのに要する仕事を求めよう.

10.5 エネルギー保存則の使い方の練習

例題 23

重力のもとで (重力加速度 g), 質量 m の質点を, 地表から速さ v_0 で鉛直上向きに打ち出した. 最高点の (地表から測った) 高さを, 力学的エネルギー保存則を用いて求めよう.

87

quiz 20

重力のもとで (重力加速度 g), 質量 m の質点を, 高さ h_0 の点から静かに落下させた. 高さ h_1 の点まで落下したときの速さを力学的エネルギー保存則を用いて求めよう.

10.6 位置エネルギーを用いた運動の解析

戸田 p.52

力学的エネルギー E を持つ物体の運動は,

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x) = E. \tag{273}$$

を満たす (力学的エネルギー保存則). 変形して,

$$E - U(x) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 \geq 0. \tag{274}$$

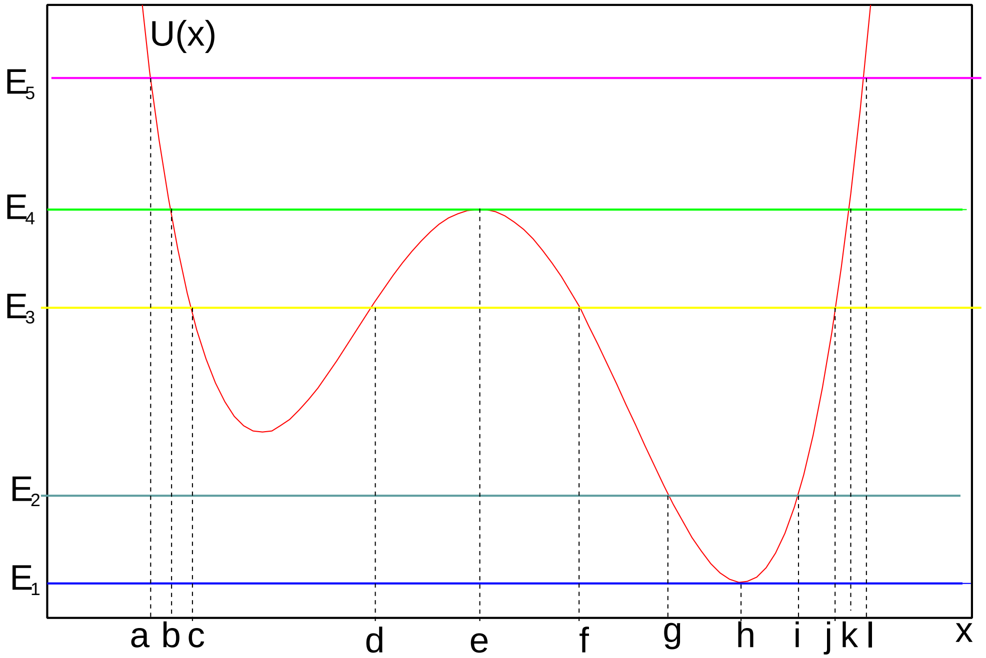
- 質点は, $E - U(x) \geq 0$ であるような x にしか移動できない.
- $E - U(x) = 0$ であるような x では, 速度が 0 になる.

また, $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x)$ より, 物体は $U(x)$ の低い向きに力を受ける.

この性質から, 運動方程式を解かなくても質点の運動の様子がわかる.

位置エネルギーが $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$ となっているような点を 平衡点 という.
平衡点では力が働かないので, 静かに平衡点に置かれた質点は, ずっと平衡点上にいる.

例



$E = E_1$ のとき $x = h$ で静止. $x = h$ は平衡点.

$E = E_3$ のとき $c \leq x \leq d$ を往復. または, $f \leq x \leq j$ を往復

$E = E_4$ のとき $x = e$ で静止. $x = e$ は平衡点. または, $b \leq x < e$ から $x = e$ に限りなく近づく. または, $e < x \leq j$ から $x = e$ に限りなく近づく. $(t \to \infty)$

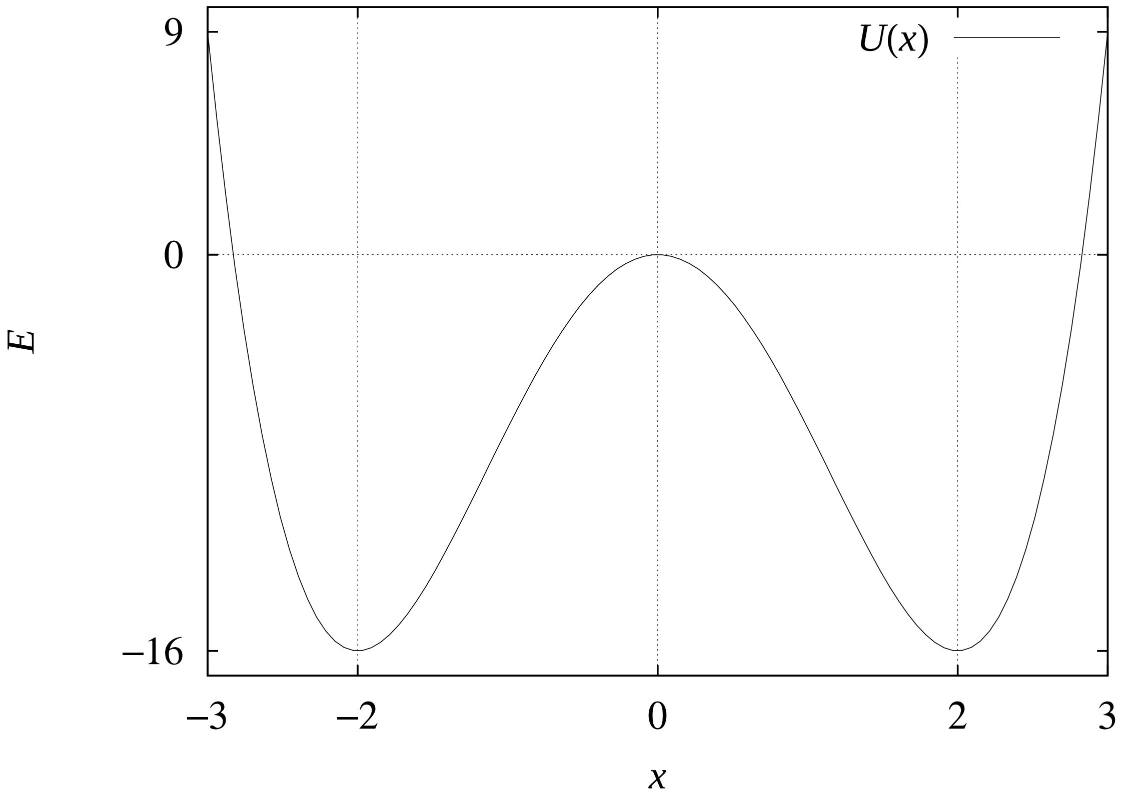
quiz 21

$E = E_2, E_5$ のときの運動を, 上の例ののりで説明しよう.

例題 24

直線上を運動する質量 $m=2$ **の質点を考える．直線上に** x **座標をとる．位置エネルギーは** $U(x)=x^4-8x^2$ **である．関数** $U(x)$ **のグラフは図のようになる．**

1. **質点のうける力** $F(x)$ **を求めよう．**
2. **平衡点をすべて求めよう．**
3. **時刻** $t=0$ **には，質点の位置は** $x(0)=-2$, **速度は** $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-2$ **だった．位置エネルギー，運動エネルギー，力学的エネルギーの関係を利用して，時間** $t>0$ **に質点が運動する範囲と，運動の様子を答えよう．**
4. **時刻** $t=0$ **に，位置** $x(0)=-2$ **から出発した質点が，** $t>0$ **のどこかの時点で，位置** $x=\sqrt{6}$ **に到達する，あるいは通過するためには，初速度** $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)$ **はどのような範囲の値でなくてはならないか，エネルギー保存則を利用して答えよう．**



9
0
−16
E
U(x)
−3
−2
0
2
3
x

10.7 エネルギー保存則を使う解き方と運動方程式を解く解き方の比較

エネルギー保存則を使う解き方

♡ 微分方程式を解かなくても答が出せる.

♡ 異なる時刻の位置と速度を直接関係づけられ, 計算が楽.

♠ 位置と速度を時間の関数として求められない.

♠ 保存力の場合にしか使えない.

運動方程式を解く解き方

♠ 微分方程式が解けないと何もできない.

♠ 計算が長くなる.

♡ 位置と速度を時間の関数として求められる.

♡ 保存力でない場合にも使える.

10.8 興味と暇がある人のための注 1

戸田 p.48

(255) を $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ について解いた

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \tag{277}$$

を積分することによっても $x(t)$ が求められる．落下運動の場合:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - mgx)} \tag{278}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{E}{mg} - x}} = \sqrt{2g}\mathrm{d}t \tag{279}$$

$$-2\sqrt{\frac{E}{mg} - x} = \sqrt{2g}t + C \tag{280}$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2. \tag{281}$$

10.9 興味と暇がある人のための注 2

戸田 3-9

3 次元での保存的な力とポテンシャルとの関係 (応用ベクトル解析)

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(-\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z),-\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z),-\frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z)). \tag{282}$$

2 次元以上では, 保存的でない力 (上の形に書けない力) のほうが普通.

ファイナルトライアル

2003/01/23(**金**)1 **講時. 科目の成績は** 100 **点**= quiz 10 + **秋のプチテスト** 15 + **冬のプチテスト** 25 + **ファイナルトライアル** 50. **外部記憶ペーパー使えます. 別紙参照してね.**