樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2004/01/16 Fri 13:02 hig"

10.10 前回の quiz の略解

quiz 略解 19

力に抗して, だから, $-F$ の力が必要. 仕事は,

$$\int_{-1}^{+2} -F(x)\,\mathrm{d}x = U(+2) - U(-1) = 6 - \frac{3}{4} = \frac{21}{4}.$$

quiz 略解 20

地表面から上向きに測った高さを x とすると, 保存則は
$\frac{1}{2}m(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t))^2 + mgx(t) = E$. **落下し始めた瞬間には**, $E = mgh_0$. **高さ**

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

$x = h_1$ の点での速さを v_1 とすると, $E = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = E$. この 2 つの式から E を消去すると, $v = \sqrt{2g(h_0 - h_1)}$.

quiz 略解 21

$E - U(x) \geq 0$ となる領域を考えればよい. $E = E_2$ のとき, $g \leq x \leq i$ を往復. $E = E_5$ のとき, $a \leq x \leq l$ を往復. (ただし, $x = e$ あたりではいったん減速する.)

力に抗して, に関する注意

ほうっておいたら, 質点は, $F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x)$ の傾きに従って低い方へと移動していく.

$-F = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x)$ の力を別に加えてやると, その場にとどまる.

$-F +$ ちょっとの力 で, ゆっくりでよければ, F に抗して移動させられる. このようにして, $x = x_0$ から $x = x_1$ まで運ぶとき, このとき, 別の

力 $-F+$ ちょっとの力 のする仕事は

$$W=\int_{x_0}^{x_1}-F(x')\mathrm{d}x'=-\int_0^{x_1}F(x')\mathrm{d}x'+\int_0^{x_0}F(x')\mathrm{d}x'=U(x_1)-U(x_0). \tag{283}$$

つまり, **位置エネルギーの差だけの仕事が必要**.

たくさん仕事をするほど, **位置エネルギーの高い点まで運べる**.

例題 25

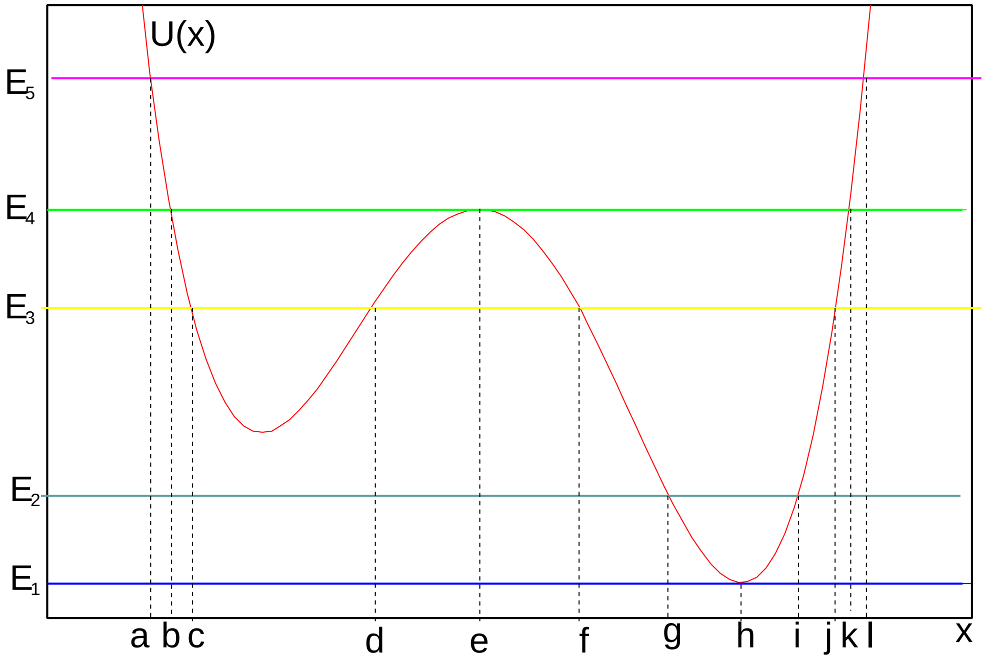
自然長が ℓ, ばね定数が k のばねを鉛直方向に地面に固定した. ばねに, 質量 m の球をとりつけ, 自然長から a だけばねを押し縮めて静かに手をはなして運動させた. 球の達した最も高い点の高さを求めよう.

89

11. 平衡点と微小振動

戸田 p.50

位置エネルギーが $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$ となっているような点を $\boxed{\text{平衡点}}$ という. ($\text{上の例の } x = e, h$) 平衡点では力が働かないので, 静かに平衡点に置かれた質点は, ずっと平衡点上にいる.



平衡点 $x = x_0$ から, わずかにずれた点に置かれた場合を考えよう.

$x = x_0$ の近くを考えるので, $U(x)$ を $x = x_0$ のまわりにテイラー展開し

て考えてもよい.

$$\begin{aligned} U(x) =& U(x_0) + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \cdots \\ \approx& U(x_0) + 0 + \frac{1}{2}k\cdot s^2. \quad \left(k = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\right) \end{aligned} \tag{284}$$

あるいは, $x = x_0 + \Delta x$ と書いたとき,

$$U(x_0+\Delta x) = U(x_0) + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

ただし, $(\Delta x)^3 = (x-x_0)^3$ 以降は小さいので無視した.

ここで, $k = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$ なら, この位置エネルギーは, これはばねについた質点の位置エネルギー

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{285}$$

と (定数プラスと, 原点ずらしを除いて) 同じ!

これは,

平衡点 x_0 の近くでは, 質点は, 近似的に,

$x = x_0$ を中心とする, 90 の単振

動をする

ことを意味している. これを微小振動という.

このことは, 質点の運動方程式が, 近似的に

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(U(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2\right) = \boxed{91} \tag{286}$$

となることからもわかる.

このような, $k = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$ の場合 (例 $x = h$) には, 質点は x_0 の近くにとどまる. こういうのを 安定な平衡点) という.

一方, $k = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) < 0$ である平衡点から少しずらすと, どんどん離れていってしまう (例. $x = e$) こういうのを 不安定な平衡点) という.

例題 26

位置エネルギー $U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ のもとで, 質量 m の質点が運動している. 平衡点を求めよう. 安定な平衡点については, その周りの微小振動の周期を求めよう.

92

93

quiz 22

位置エネルギー $U(x)=\cos(x)$ のもとで, 質量 $m=3$ の質点が運動している. 平衡点を求めよう. 安定な平衡点については, その周りの微小振動の周期を求めよう.

12. 等速円運動と単振動

戸田 p.57

12.1 等速円運動

(x,y) 平面で運動する質量 m の質点を考える.

時刻 t における質点の座標が

$$(x(t),y(t))=(A\cos\omega t, A\sin\omega t) \tag{289}$$

であるような運動を, 原点を中心とする 94 という

$(A>0, \omega>0$ は定数$)$

A は円運動の半径, ω は円運動の角速度. $T=\frac{2\pi}{\omega}$ は円運動の周期.

等速円運動をする質点はどのような力を受けているか?

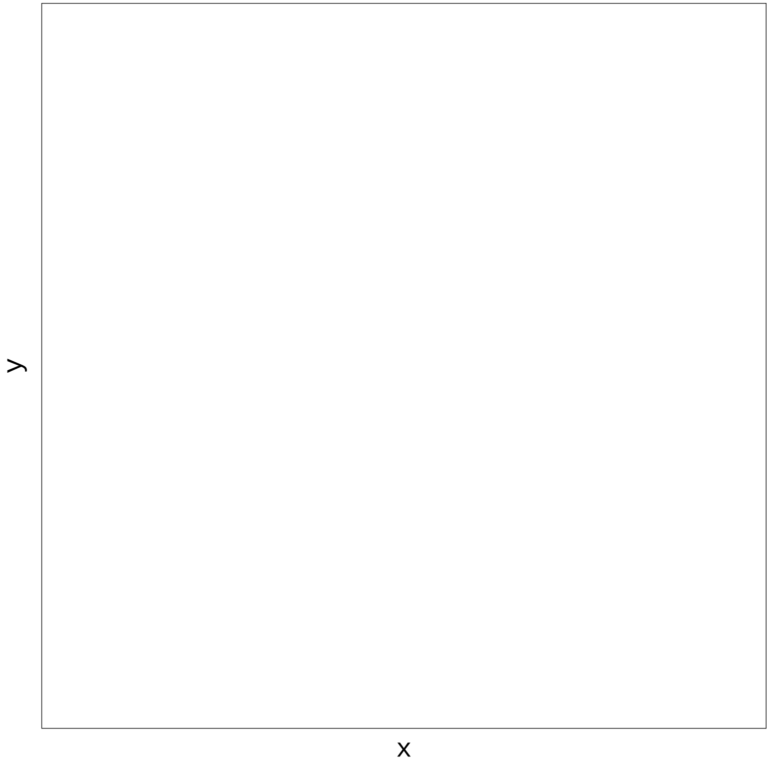
2 次元の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \mathbf{F}, \tag{290}$$

あるいは成分で表示して,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_x, \tag{291}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_y \tag{292}$$



で, (289) を左辺に代入して,

$$F_x = m \times (-\omega^2 A \cos\omega t) = -m\omega^2 x(t) \tag{293}$$

$$F_y = m \times (-\omega^2 A \sin\omega t) = -m\omega^2 y(t) \tag{294}$$

あるいは

$$\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r}(t). \tag{295}$$

$$|\mathbf{F}| = m\omega^2|\mathbf{r}(t)| = m\omega^2 A. \tag{296}$$

つまり, 向きが原点向き, 大きさが $m\omega^2|\mathbf{r}|$ の力 (95 という) がはたらいているときに円運動となる ($|\mathbf{r}|$ は原点からの距離).

12.2 遠心力

ニュートンの運動方程式は 慣性系 で見たときに成立するのだった.

実際, 等速円運動している人の立場で (例. メリーゴーラウンドに乗ってる人. 自転する地球に乗ってる人) の立場に立って考えると, 力 $\mathbf{F}$ があるのに静止している (加速度が零である) ことになり, 運動方程式は成立しない.

しかし, どうしても等速円運動している人の立場で運動方程式を立てたいときは, 遠心力 $-\mathbf{F} = m\omega^2\mathbf{r}$ が働いていて, 向心力 $\mathbf{F}$ とつりあっていて, 加速度が零になっている, と考える.

遠心力は, 観測者が等速円運動していることを表わすために導入された仮想的な力である.

$\Rightarrow$ 回転座標系 (物理数学☆演習 I)

12.3 単振動と等速円運動

ばねの力を 2 次元にした力

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}, \tag{297}$$

のもとで運動する, **質量** m **の質点を考える**.
運動方程式 $m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\mathbf{r}(t)$, **あるいは成分で書いて**,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,kx(t), \tag{298}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,ky(t) \tag{299}$$

の解を, **初期条件**

$$x(0) = A, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0, y(0) = 0, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = \sqrt{k/m}A \tag{300}$$

のもとで求めよう.

$x(t), y(t)$ **は別々に求められる.** $\omega = \sqrt{k/m}$ **とすると,**

$$x(t) = A\cos\omega t, \tag{301}$$

$$y(t) = A\sin\omega t \tag{302}$$

となる. つまり, x, y **座標の一方をみると単振動だが,** (x, y) **としてみると** **等速円運動** **である.** $\rightsquigarrow$ **アニメ**

実際, t **を消去して軌跡を求める** **と,** $x(t)^2 + y(t)^2 = A^2$ **となる.**

- 2 **次元の力** $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$ **のもとでは等速円運動が起きることがある**
- **等速円運動する質点の** x **座標** (y **座標**) **だけをみると単振動である.**

quiz 23

運動方程式 $m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\mathbf{r}(t)$ **の, 初期条件**
$x(0) = A, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0, y(0) = 0, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 2\sqrt{k/m}A$ **のもとでの解の軌跡は楕円である. その式を求めよう.**