物理数学☆演習 II 冬のプチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2006-11-29 Wed 更新: 2006-12-22 11:29JST

冬のプチテスト参加案内

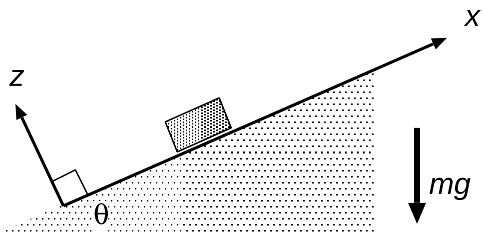
1. **4 問 60 分です．裏もあります**
2. 出席チェックのときに学生証を見せてね.
3. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

角度 θ だけ傾いた粗い面の上をすべる質量 m の物体を考える. 図のように, 斜面と平行な上向きに x 軸, それと垂直な方向に z 軸を取る.

物体と面の間の動摩擦係数を μ', 重力加速度の大きさを g とする.

1. 垂直抗力の大きさを N として, x, z 軸方向の運動方程式をそれぞれ書こう.
2. 時刻 $t = 0$ に原点から初速度の大きさ v_0 で物体を斜面にそって上向きに発射した. このとき, 運動方程式を初期条件のもとで解いて時刻 $t = 0$ 以降の物体の運動を求めよう.
3. 物体が止まるまでに進んだ距離を求めよう.



2

z 軸の正の向きを鉛直上向きにとる. 質量 m の物体が重力 (重力加速度の大きさ g) と空気抵抗の力を受けて z 軸上を運動する. 空気抵抗の力の大きさは速さの 2 乗に比例する (比例定数 $\beta > 0$).

1. 運動方程式を書こう.
2. 終端速度 v_∞ を (安易な方法でよいので) 求めよう.

うらにつづく

hig@math.ryukoku.ac.jp http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

2007年度以降に参照する方へ:この問題は, プチテスト用に意図したより計算が複雑になってしまっています

質量 $m=2$ の物体が水平な一直線上を運動する. 物体はばね定数 $k=8$ のばねによって壁につながれており, また速さの1乗に比例する空気抵抗の力 (比例定数 $\beta=6$) を受ける. 摩擦力は考えない.

時刻 $t=0$ に, ばねを2だけ押し縮めて, 静かに手を離した.

自然長の位置を原点として, ばねが伸びる方向に x 軸の正の向きをとる.

1. 運動方程式を書こう.
2. 初期条件を書こう.
3. 運動方程式を初期条件のもとで解いて運動を求めよう.

4

微分方程式

$$1\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+8\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+20x(t)=0$$

を, 初期条件 $x(0)=0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=-12$ のもとで解いて $x(t)$ を求めよう. 範囲 $t\geq 0$ についてグラフを描こう.

おしまい

物理数学☆演習 II 冬のプチテスト略解

樋口さぶろお[2]

1

1.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\sin\theta + \mu' N\cdot\frac{-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)}{\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right|},$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\cos\theta + N.$$

2. 初期条件は, $x(0)=0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=+v_0(>0)$. よって, x 軸方向の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\sin\theta - \mu' N$$

となる. 斜面から離れない条件 $z=0$ から $N=mg\cos\theta>0$. x 軸方向の運動方程式に代入して解くと,

$$x(t) = -\frac{1}{2}g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)t^2 + C_1\cdot t + C_2. \tag{4.1}$$

初期条件より, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=C_1=v_0$. $x(0)=C_2=0$. よって

$$x(t) = -\frac{1}{2}g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)t^2 + v_0t. \tag{4.2}$$

3. 静止する時刻 $t=T$ は $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T)=0$ から

$$T = \frac{v_0}{g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)}. \tag{4.3}$$

と求まる. 上った距離は

$$|x(T)-x(0)| = \left|\frac{v_0^2}{2g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)}\right| = \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)}. \tag{4.4}$$

講評 1. の運動方程式を書く問題では, どちら向きに発射したかは書いてないわけで, 速度が上向き, 下向き両方に通用する式を答える必要がある. したがって, 絶対値を外す前の式 (あるいは場合分けした式) でなければならない.

2. では上向き発射なので, 絶対値をはずすことができる. 1. で答えた式から 2. 以降の答えを導くわけだが, 突然 2. で別の式になるというのは反則.

3. 止まる時刻が正にならなかったらおかしいと思おう.

hig@math.ryukoku.ac.jp http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2

1.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + \beta \cdot \left|\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right|^2 \cdot \frac{-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)}{\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right|}$$

2. 十分時間がたつと, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) < 0$ となる．このときの運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + \beta \cdot \left(\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2.$$

$t \to +\infty$ で, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \to v_\infty$(一定) となるとすると, $0 = -mg + \beta \cdot v_\infty^2$ であり，これを解いて, $v_\infty = \pm(\frac{mg}{\beta})^{\frac{1}{2}}$. 終端速度は $v_\infty < 0$ であるはずなので, $v_\infty = -(\frac{mg}{\beta})^{\frac{1}{2}}$

講評　問題文には落下とも投げ上げとも書いてないので, 1. ではどちらにも通用する式を書かなければいけない．したがって, 1. の答は絶対値を外す前の式 (あるいは場合分けした式) でなければならない．2. で終端速度 (それは物理的に考えて下向き) を考える段階になって, 落下という場合を考えて絶対値を外す.

3

1. $2\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -8x(t) - 6 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$.
2. $x(0) = -2, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.
3.

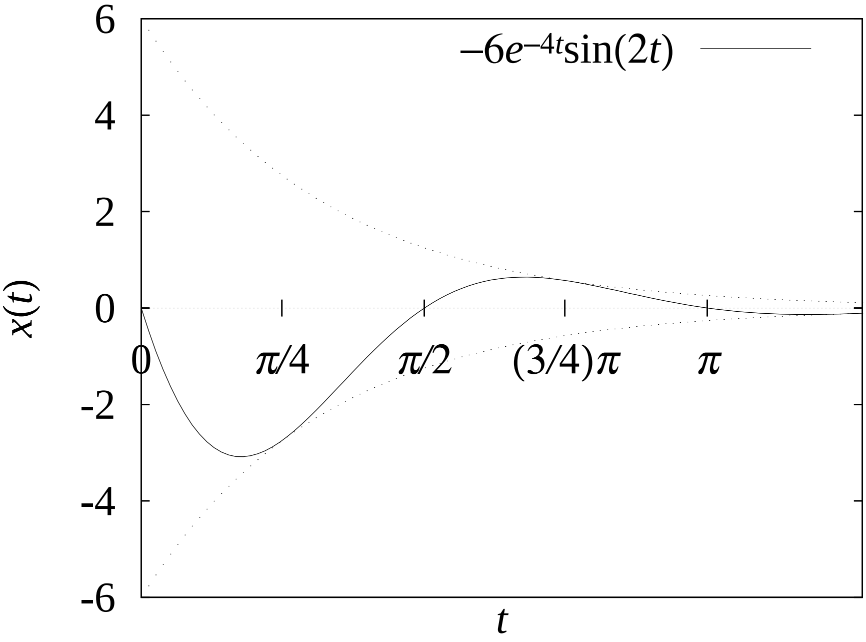
$$\begin{aligned} x(t) &= \left(-1 + \frac{3}{\sqrt{7}}i\right) \mathrm{e}^{\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}t} + \left(-1 - \frac{3}{\sqrt{7}}i\right) \mathrm{e}^{\frac{-3-\sqrt{7}i}{2}t} \\ &= -\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\left(2\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + \frac{6}{\sqrt{7}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right). \end{aligned}$$

講評　ばねの力は, 座標軸がどちら向きでも $-k \times$ (自然長からの変位).

4

$$x(t) = 3i\mathrm{e}^{(-4+2i)t} - 3i\mathrm{e}^{(-4-2i)t} = -6\mathrm{e}^{-4t}\sin 2t.$$

下の図は特徴を強調して描いています.



講評　振動の位相は, $-\sin$ なので, $x=0$ から下向きにでることになる．これは初期条件からもわかる．

また, $\sin 2t = \pm 1$ となる時刻に $x(t)$ と $6\mathrm{e}^{-4t}$ は接する (そこは $x(t)$ の極大極小ではない).

秋のプチテストのスコアは e-learning サイト `https://f5lms.media.ryukoku.ac.jp` でお知らせします．スコアが入力された際には, メールアドレス`@mail.ryukoku-u` に通知されます.

`http://hig3.net`