物理数学☆演習 II ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-01-31 Wed 更新: 2007-02-21 12:46JST

ファイナルトライアル参加案内

1. **外部記憶ペーパー作成 10 分＋答案作成 80 分です.**
2. 出席チェックのときに学生証を見せてね.
3. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
5. 可能な場合には答えから $i=\sqrt{-1}$ を消して実数で答えよう.

1

次の微分方程式を解こう. 積分定数は残ってよい. 虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ は消そう.

1. $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=3-9x(t).$$
2. $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=(3-9x(t))\times t^2.$$
3. $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=3-9t.$$

2

質量 $m=2$ の物体が水平な一直線上を運動する. 物体はばね定数 $k=14$ のばねによって壁につながれており, また速さの 1 乗に比例する空気抵抗の力 (比例定数 $\beta=8$) を受ける. 摩擦力は考えない.

時刻 $t=0$ に, ばねを 3 だけのばして, ばねが縮む方向に速さ 6 で物体を打ち出した.

自然長の位置を原点として, ばねが伸びる方向に x 軸の正の向きをとる.

1. 運動方程式を書こう.
2. 初期条件を書こう.
3. 運動方程式を初期条件のもとで解いて運動を求めよう.

うらにつづく

hig@math.ryukoku.ac.jp http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

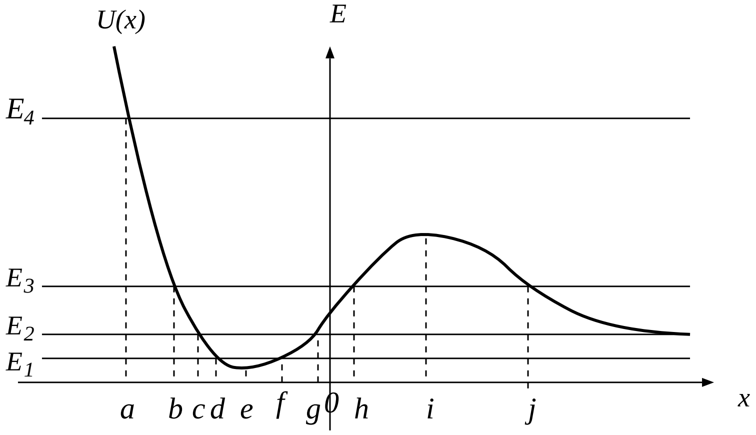
3

自然長 ℓ のばね (ばね定数 k) を床に置き, その上に質量 m の物体を置く. 物体には重力 (重力加速度の大きさ g) がはたらく. 空気抵抗の力ははたらかない. 鉛直上向きに座標軸 x をとり, 床を原点とする. 時刻 t における物体の位置を $x(t)$ とする.

1. 力学的エネルギー保存則を書こう (証明しなくてよい. ばねや重力の位置エネルギーの形を覚えている人は, 位置エネルギーを力から導かなくてよい. 導いてもよい.)
2. ばねを長さ $\frac{4}{3}\ell$ になるまで伸ばして静かに手をはなしたところ, 振動した. ばねが自然長にもどったときの物体の速さを求めよう.

4

物体が, x 軸上を図のポテンシャルエネルギーのもとで運動している.



1. 物体の力学的エネルギーが E_1 であるとき物体はどのように運動するか. 授業でやったようなのりで説明しよう.
2. ある時刻に $x = b$ にある物体の力学的エネルギーが E_3 である. その後, 物体はどのように運動するか. 授業でやったようなのりで説明しよう.
3. ある時刻に $x = j$ にあり x の負の方向に進んでいる物体の力学的エネルギーが E_4 である. その後, 物体はどのように運動するか. 授業でやったようなのりで説明しよう.

5

質量 $m = 20$ の物体が, x 軸上をポテンシャルエネルギー $U(x) = 3x^4 - 32x^3 + 90x^2$ のもとで運動している.

1. 位置 x にある物体の受ける力を求めよう.
2. $x = 5$ は安定な平衡点である. これ以外の平衡点をすべて求め, それぞれ安定であるか, 安定でないかを答えよう.
3. 安定な平衡点 $x = 5$ のまわりの物体の微小振動の周期を求めよう.

おしまい

物理数学☆演習 II ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2]

1

1. $a\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+cx(t)=d$ 型.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)-\tfrac{1}{3})+9(x(t)-\tfrac{1}{3})=0$$

とかける. $X(t)=x(t)-\frac{1}{3}=\mathrm{e}^{\lambda t}$ とおくと,

$$(\lambda^2+9)\mathrm{e}^{\lambda t}=0$$

より, $\lambda=\pm 3i$. 重ねあわせの定理より一般解は

$$X(t)=C_+\mathrm{e}^{+3it}+C_-\mathrm{e}^{-3it}\qquad (C_\pm \text{ は任意定数})$$

$x(t)$ に直してオイラーの公式を用いると,

$$x(t)=A\cos(3t)+B\sin(3t)+\tfrac{1}{3}\qquad (A,B \text{ は任意定数})$$

2. 変数分離形.

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-\frac{1}{3}}&=\int -9t^2\,\mathrm{d}t\\ \log|x-\tfrac{1}{3}|&=-3t^3+C\qquad (C \text{ は任意定数})\\ x-\tfrac{1}{3}&=\pm\,\mathrm{e}^{-3t^3}\mathrm{e}^{C}\\ x(t)&=\tfrac{1}{3}+C'\mathrm{e}^{-3t^3}\qquad (C'=\pm\mathrm{e}^{C} \text{ は任意定数})\end{aligned}$$

3. $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=f(t)$ 型. $v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)=3-9t$$

となり変数分離形. これを解くと,

$$v(t)=-\tfrac{9}{2}t^2+3t+C.\qquad (C \text{ は任意定数})$$

ここで $v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ に注意するとこれは再び変数分離形であり, 解くと,

$$x(t)=-\tfrac{3}{2}t^3+\tfrac{3}{2}t^2+Ct+D.\qquad (C,D \text{ は任意定数})$$

Remark 1. では, X に移っておきながら最後に x に戻るのを忘れていた答案が多くありました.
2. では, $\dfrac{1}{3x-1}$ の置換積分が正しくできていない答案が多くありました.

hig@math.ryukoku.ac.jp http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2

1. $2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -14x(t) - 8 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$.
2. $x(0) = 3, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -6$.
3. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおくと, $\lambda = -2 \pm \sqrt{3}\, i$ となり, 初期条件を用いると,

$$x(t) = \tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{3}\,i)t} + \tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{(-2-\sqrt{3}\,i)t} = 3\mathrm{e}^{-2t}\cos(\sqrt{3}\,t).$$

Remark 2. で速度は負です. 伸びる方向が正の向きで, 縮む方向に打ち出したから.

3

1.

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + mgx(t) + \frac{1}{2}k(x(t) - \ell)^2 = E \quad (\text{定数})$$

2. 手をはなした時刻 t_1 には,

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 + mg \cdot \frac{4}{3}\ell + \frac{1}{2}k\left(\frac{4}{3}\ell - \ell\right)^2 = E.$$

自然長にもどった時刻 t_2 には,

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_2)\right)^2 + mg\ell + \frac{1}{2}k \cdot 0^2 = E. \tag{5.1}$$

定数 E を消去し, 速さ $v = \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_2)\right|$ について解くと,

$$v = +\left[\frac{2}{m}\left(mg \cdot \frac{\ell}{3} + \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{3}\ell\right)^2\right)\right]^{1/2}$$

Remark 符号とか, 全長か伸びかとか難しいのは確かですが, 1. で求めた保存則の $x(t)$ や $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ に値を代入するって方針をしっかり持ちましょう. 時刻 t_1 と t_2 で, 1. で求めた式を変えちゃってる答案が多くありました.

2. で最後に平方根を取るところで, $A^2 = B + C$ から $A = \sqrt{B} + \sqrt{C}$ となっちゃってる答案が多くありました. $B = C = 1, A = \sqrt{2}$ とおいてみて.

4

1. $x = d$ と $x = f$ の間を往復運動する.
2. x の正の向きに動きだし, $x = h$ まで進んで一瞬静止する. 次に x の負の向きに動きだし, $x = b$ まで進んで一瞬静止する. 以後はこの往復運動を繰り返す.
3. ($x = i$ 付近でいったん遅く, $x = e$ 付近でいったん速くなるが) $x = a$ まで x の負の向きに進み一瞬静止する. そのあと x の正の向きに動きだし, $t \to \infty$ で $x \to +\infty$ となる.

Remark 位置エネルギーっていう話になってるってことは, 力は保存的であり, 摩擦力とかはないってことです. ということは, 力学的エネルギーは保存して, 減衰したり, 最後に静止したりはしないはずです.

5

1. 物体の受ける力 $F(x)$ は

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x) = -12x^3 + 96x^2 - 180x = -12x(x-3)(x-5).$$

2. 平衡点は $F(x) = 0$ となる点であり, $x = 0, 3, 5$. また $\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x) = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) > 0$ なら安定, < 0 なら不安定. $\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(0) = 180$, $\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(3) = -72$, $\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(5) = 120$ なので, $x = 0, 5$ は安定, $x = 3$ は不安定.
3. $x = 5$ において $U(x)$ をテイラー展開すると,

$$U(x) = 125 + 60(x-5)^2 + O\left((x-5)^3\right).$$

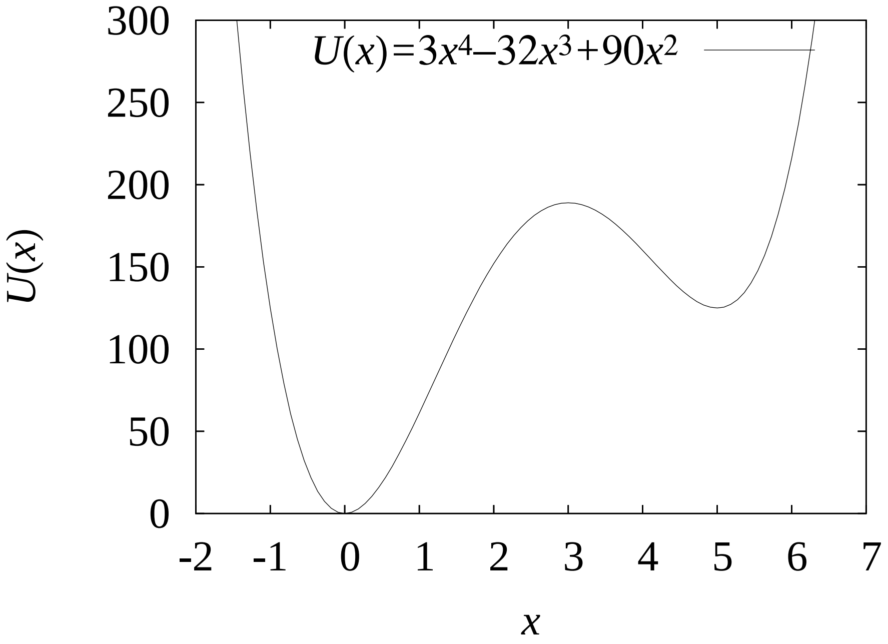
3 次以上の項を無視すると, 運動方程式は

$$20 \cdot \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -120(x-5).$$

これを解くと,

$$x(t) = 5 + A\cos\left(\sqrt{6}\cdot t\right) + B\sin\left(\sqrt{6}\cdot t\right). \quad (A, B \text{ は積分定数})$$

周期 T は $\sqrt{6}\cdot T = 2\pi$ より, $T = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}$.



Remark $-12x(x-3)(x-5) = 0$ っていうところで, x で割ったために $x = 0$ という解を見逃した人がいました. 両辺割っていいのは 0 じゃないときだけです.

秋のプチテストのスコアは e-learning サイト `https://f5lms.media.ryukoku.ac.jp` でお知らせします. スコアが入力された際には, メールアドレス`@mail.ryukoku-u` に通知されます.