正規分布・確率変数の変数変換

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I L08(2015-11-20 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-11-21 Sat 07:42 JST hig"

今日の目標

- (標準でない) 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数, 母平均値, 母分散を書ける.
- (標準でない) 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率を表から求められる.
- 2 変数の同時分布, 独立性の意味を説明できる.

http://hig3.net

L07-Q1
Quiz 解答:連続的な値をとる確率変数

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathbf{1}_{[X\geq\frac{1}{4}]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1/4}^{1/2} 8x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}.$$
2. $$\mathrm{E}[X] = \int_{0}^{1/2} f(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = 1/3.$$
3. $$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \tfrac{1}{8} - (\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{1}{72}.$$
4. $$\mathrm{E}[\tfrac{1}{\sqrt{X}}] = 2^{5/2}/3.$$

L07-Q2
Quiz 解答:連続的な値をとる確率変数

1.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathbf{1}_{[0\le X<2]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log 2.$$

2.
$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1.$$

3.
$$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1) - (\mathrm{e}-1)^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)(3-\mathrm{e}).$$

4.
$$\mathrm{E}[\tfrac{1}{X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1-\mathrm{e}^{-1}$$

L07-Q3

Quiz 解答:連続型確率変数の母期待値

条件は,

$$\mathrm{E}[1] = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{E}[X] = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot x\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{V}[X] = 4 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot x^2\,\mathrm{d}x - 0^2.$$

(2) は偶関数なら OK. (1) を考えて

$$f(x) = \begin{cases} 1/(2a) & (-a \le x < a) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

でどう?

(3) を解いて, $a = 2\sqrt{3}$.

答のひとつは

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{3}} & (-2\sqrt{3} \leq x < +2\sqrt{3}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

解答例 2:
既存の X に対して, $\mathrm{E}[aX+b] = a\mathrm{E}[X]+b$, $\mathrm{V}[aX+b] = a^2\mathrm{V}[X]$ を使って, $Y = aX+b$ が希望の値になるように調整する. 確率密度関数 $f(x)$ は平行移動, 拡大縮小される.

ここまで来たよ

3 連続型確率変数

4 正規分布・確率変数の変数変換
- 標準正規分布
- 1 次関数による確率変数の変数変換
- (標準でない) 正規分布
- 2 変数の確率分布

連続型確率変数の復習

確率密度関数 $f(x)$

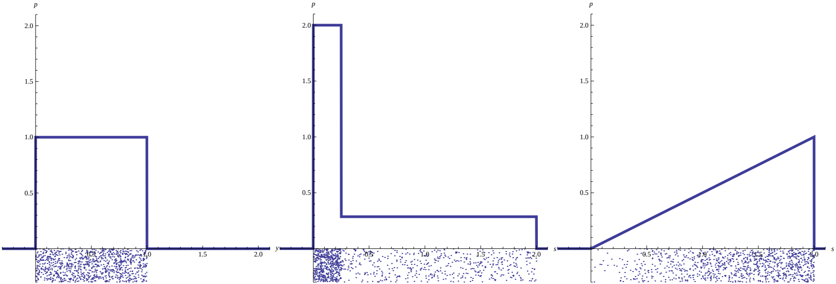
$$\phi(x) \text{ の母期待値} \quad \mathrm{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\text{確率 } P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)\mathbf{1}_{[a \leq X < b]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

累積分布関数 $\boxed{}$

$$F(a) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = P(X < a).$$

確率密度関数の例



上の確率密度関数に対応する累積分布関数

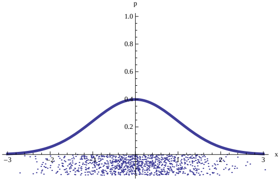
標準正規分布 (ガウス分布)

標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$

$$\text{確率密度関数 } f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\text{累積分布関数 } F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z'^2}{2}} \, \mathrm{d}z'$$

正規 $=$ normal



$\mathrm{N}(0, 1^2)$ の性質

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ のとき,

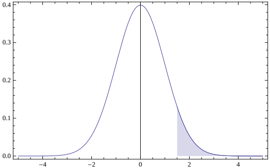
- $\mathrm{E}[1] = 1$ いつもどおり．これを確かめる計算はたいへん 微積分・演習 II
- 母平均値 $\mathrm{E}[Z] = 0$.
- 母分散 $\mathrm{V}[Z] = 1^2$. これもたいへん 微積分・演習 II
- 確率 P は特別な場合を除いてきれいに計算できない．原始関数 $\displaystyle\int f(z)\,\mathrm{d}z$ は式で書けない.

そこで…

標準正規確率表 (上側確率=$Q(z) = 1 - F(z)$)

z に対する $Q(z) = 1 - F(z)$ (斜線部分の面積) の値の表. $F(z)$ は累積分布関数.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010



L08-Q1

Quiz(標準正規分布の確率)

X は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う． $X < -2$ となる確率は?

L08-Q2

Quiz(標準正規分布の確率)

Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う連続型確率変数である．

1. 母期待値 $\mathrm{E}[Z^2]$ を求めよう．
2. 確率 $P(-0.56 < Z < +1.23)$ を表から求めよう．

ここまで来たよ

3 連続型確率変数

4 正規分布・確率変数の変数変換
- 標準正規分布
- 1 次関数による確率変数の変数変換
- (標準でない) 正規分布
- 2 変数の確率分布

確率変数 X, Y が $X = aY + b$

例

次の確率密度関数 $f_{\mathrm{Y}}(y)$ を持つ連続型確率変数 Y を考える.

$$f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (-1 \leq y < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$

$f(y)$, $F(y)$

計算してわかること.

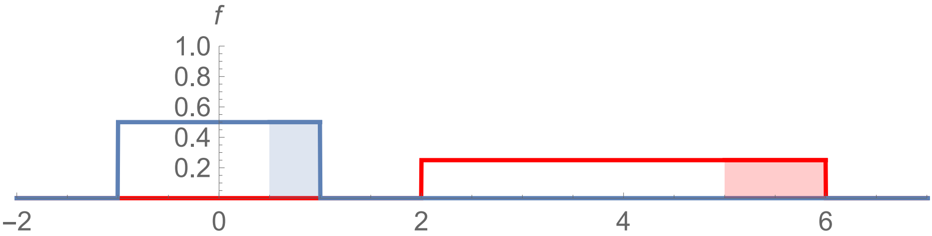
$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y] =& 0, \\ \mathrm{V}[Y] =& \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} y^2 \mathrm{d}y - 0^2 = \frac{1}{3}, \\ P(Y > c) =& \frac{1}{2}(1 - c). \qquad (-1 \leq c < +1) \end{aligned}$$

$X = aY + b$ とする. $X = aY + b$ の従う確率密度関数は $f_{\mathrm{X}}(x)$ は?
$y = \frac{x-b}{a}$ を $f_{\mathrm{Y}}(y)$ に代入
Y は, 横に a 倍して, 横に b だけ平行移動.

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \frac{1}{a} \times f(\frac{x-b}{a}) = \frac{1}{a} \times \begin{cases} \frac{1}{2} & (-1 \leq \frac{x-b}{a} < 1) \Leftrightarrow (b-a \leq x < b+a) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

面積 $\mathrm{E}[X] = 1$ を一定にするために $\frac{1}{a}$.
$f_{\mathrm{X}}(x)\,\mathrm{d}x = f_{\mathrm{Y}}(y)\,\mathrm{d}y$

計算科学☆実習 B



こんなこと言ってたけど?

$X = aY + b$ の母平均値と母分散

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] =& \mathrm{E}[aY + b] = a\mathrm{E}[Y] + b \\
\mathrm{V}[X] =& \mathrm{V}[aY + b] = a^2\mathrm{V}[Y]
\end{aligned}
$$

ここまで来たよ

3 連続型確率変数

4 正規分布・確率変数の変数変換
- 標準正規分布
- 1 次関数による確率変数の変数変換
- (標準でない) 正規分布
- 2 変数の確率分布

一般の正規分布

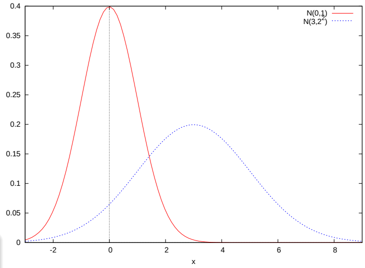
確率密度関数

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}$$

$X = aZ + b$ を考える.
母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X] = b$,
母分散 $\sigma^2 = \mathrm{V}[X] = a^2 \mathrm{V}[Z] = a^2$.
確率密度関数は, z のところに $z = \frac{x-b}{a} = \frac{x-\mu}{\sigma}$ を代入すればいいので,

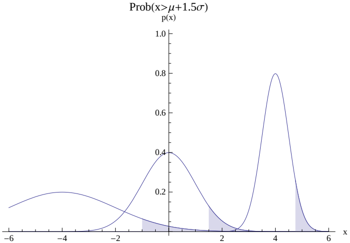
(一般の) 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$



$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率の求め方

$\mathrm{N}(0, 1^2)$ とほとんど同じ



'対応する' 部分の面積は同じなので, 対応する z の範囲を考えて, 表から求める.

L08-Q3

Quiz(正規分布の確率)

母平均値 3, 母分散 4 の正規分布で,

1. $X \geq 5$ となる確率を求めよう.
2. $+1 \leq X \leq 7$ となる確率を求めよう.

L08-Q4

Quiz(正規分布の確率)

1. 母平均値 0, 母分散 1^2 の正規分布で, $0.5 \le X \le 0.7$ となる確率を求めよう.
2. 母平均値 0, 母分散 2^2 の正規分布で, $0.5 \le X \le 0.7$ となる確率を求めよう.
3. 母平均値 3, 母分散 2^2 の正規分布で, $4.0 \le X \le 4.4$ となる確率を求めよう.

ここまで来たよ

3 連続型確率変数

4 正規分布・確率変数の変数変換
- 標準正規分布
- 1 次関数による確率変数の変数変換
- (標準でない) 正規分布
- 2 変数の確率分布

2 変数の離散型確率変数の同時分布

6 枚のカードから無作為に 1 枚のカードを引く.

♡7　♡8　♡9 ◇8 ♠9 ♣9

同時分布

$X=$ 数, $Y=0$(赤札), 1(黒札) とすると (x,y) を得る確率 f^{XY}_{xy} は,

$$f^{\mathrm{XY}}_{xy}=\begin{cases}\frac{1}{3} & ((x,y)=(8,0))\\ \frac{1}{6} & ((x,y)=(9,0))\\ \frac{1}{3} & ((x,y)=(9,1))\\ \frac{1}{6} & ((x,y)=(7,0))\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

2 変数以上のとき同時分布 結合分布 joint distribution という

表で書いた方がまし．ここでは，「他」は省略．

$y \backslash x$	7	8	9	計
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	
1	0	0	$\frac{1}{3}$	
計				

周辺分布

同時分布 f^{XY}_{xy} に対して，
X の周辺分布 $f^{\mathrm{X}}_{x} = \sum_y f^{\mathrm{XY}}_{xy}$.
Y の周辺分布 $f^{\mathrm{Y}}_{y} = \sum_x f^{\mathrm{XY}}_{XY}$.

要するに $\boxed{}$

連続型の周辺分布

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y, \quad f_{\mathrm{Y}}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

同時分布の母期待値

同時分布の母期待値

離散型　$\mathrm{E}[\phi(X,Y)] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} f(x,y) \cdot \phi(x,y)$

連続型　$\mathrm{E}[\phi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \cdot \phi(x,y) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

L08-Q5

Quiz(多次元の確率変数の期待値)

2 変数の離散型確率変数 (X, Y) がある．同時分布 f_{xy}^{XY} が下の表で与えられる．

$y \backslash x$	1	2	3
0	0	2/12	1/12
2	4/12	0	5/12

1. 母期待値 $\mathrm{E}[X + 2Y]$ を求めよう．
2. 母期待値 $\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[Y \geq 1]}(X, Y)]$ を求めよう．
3. 周辺分布 f_x^{X}, f_y^{Y} を求めよう．

2 変数の確率変数の期待値の性質

$$\mathrm{E}[\phi_1(X,Y)+\phi_2(X,Y)] = \mathrm{E}[\phi_1(X,Y)] + \mathrm{E}[\phi_2(X,Y)]$$

$$\text{特に } \mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$$

X だけの関数の母期待値

$$\mathrm{E}[X] = \sum_x \sum_y f_{xy}^{\mathrm{XY}} x = \sum_x x \sum_y f_{xy}^{\mathrm{XY}} = \sum_x f_x^{\mathrm{X}} x$$

$$\mathrm{E}[\phi(X)] = \sum_x \sum_y f_{xy}^{\mathrm{XY}} \cdot \phi(x) = \sum_x \phi(x) \sum_y f_{xy}^{\mathrm{xy}} = \sum_x f_x^{\mathrm{x}} \phi(x)$$

$$\mathrm{V}[x] = \sum_x \sum_y f_{xy}^{\mathrm{xy}} \cdot (x-\mu_{\mathrm{X}})^2 = \cdots = \sum_x f_x^{\mathrm{x}} x^2 - (\sum_x f_x^{\mathrm{x}} x)^2$$

X だけの関数の母期待値は, $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

母共分散

母共分散

X, Y が離散型 (連続型) 確率変数で, $\mu_X = \mathrm{E}[X], \mu_Y = \mathrm{E}[Y]$ であるとき,

$$C_{\mathrm{XY}} = \mathrm{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \cdots = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y].$$

独立性の定義

独立性

確率変数 X, Y が同時分布 f^{XY}_{xy} ($f_{XY}(x, y)$) を持つとする.
X, Y が独立とは,

$$f^{\mathrm{XY}}_{xy} = f^{\mathrm{X}}_{x} \times f^{\mathrm{Y}}_{y}$$

が成立することをいう (世の中には, 同値な定義が多数).

独立とは, X,Y の値が互いに

L08-Q6

Quiz(離散型確率変数の独立性)

2 次元の離散型確率変数 (X, Y) を考える．同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ は次の表で与えられる (現れない X, Y の確率は zero である).

$y\backslash x$	2	4
2	1/2	0
4	0	1/2

1. X, Y は独立かどうか判定しよう.
2. $\mathrm{E}[X], \mathrm{E}[Y], \mathrm{E}[XY]$ を求めよう.

X, Y が独立であるとき 'だけ' 成立する性質

X, Y は確率変数, ϕ_1, ϕ_2 は任意関数

X, Y が独立であるとき 'だけ' 成立する性質

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\phi_1(X) \times \phi_2(Y)] =& \mathrm{E}[\phi_1(X)] \times \mathrm{E}[\phi_2(Y)] \\
\text{特に } \mathrm{E}[XY] =& \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y] \\
\mathrm{V}[X + Y] =& \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y]
\end{aligned}
$$

よって, X, Y が独立なとき, 母共分散 $C_{\mathrm{XY}} = 0$.

母共分散 $C_{\mathrm{XY}} = 0$ は, X, Y が独立であるための $\boxed{}$ 条件.

連絡

- オフィスアワー月 4 木 6(1-502)

manaba 出席カード提出
https://attend.ryukoku.ac.jp