同時分布・確率変数の独立性・中心極限定理

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L09(2015-11-27 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-11-27 Fri 09:57 JST hig"

今日の目標

- 2 変数の確率変数の同時分布から, 母期待値, 周辺分布を求められる
- 独立性の意味を説明でき, 独立かどうか判定できる
- 中心極限定理を説明できる

http://hig3.net

L08-Q1

Quiz 解答:標準正規分布の確率

標準正規分布の確率密度関数は偶関数 ($x = 0$ に関して対称) なので,

$$
\begin{aligned}
P(X < -2) &= \int_{-\infty}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{+2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= P(X > +2) = Q(2.00) = 0.0228.
\end{aligned}
$$

L08-Q2

Quiz 解答:標準正規分布の確率

1. $\mathrm{E}[Z^2] = \mathrm{V}[Z] + (\mathrm{E}[Z])^2 = 1.$
2. $1 - P(Z > 1.23) - P(Z > 0.56) = 1 - 0.1093 - 0.2877 = 0.6030.$

L08-Q3

Quiz 解答:正規分布の確率

1. $Z=\frac{X-3}{2}$ とすると, Z は標準正規分布にしたがう.
   $P(Z \geq \frac{5-3}{2}) = Q(1.00) = 0.1587.$
2. $Z=\frac{X-3}{2}$ とすると, Z は標準正規分布にしたがう.
   $P(1 \leq X \leq 7) = P(-1 \leq Z \leq 2) = 1 - Q(2.00) - Q(1.00) = 0.8186.$

L08-Q4

Quiz 解答:正規分布の確率

1. $\int_{0.5}^{0.7} f(x)\,\mathrm{d}x = F(0.7) - F(0.5) = (1 - F(0.7)) - (1 - F(0.5)) = Q(0.5) - Q(0.7) = 0.3085 - 0.2420 = 0.0665.$
2. $z = \frac{Z}{2}$ とすると, Z は標準正規分布に従う.
   $P(0.5 \leq X \leq 0.7) = P(0.25 \leq Z \leq 0.35) = F(0.25) - F(0.35) = Q(0.35) - Q(0.25) = 0.4013 - 0.3632 = 0.0381.$
3. $Z=\frac{X-3}{2}$ とすると, 標準正規分布に従う Z が
   $P(4.0 \leq X \leq 4.4) = P(0.5 \leq Z \leq 0.7) = (1.$ と同様$) = 0.0665.$

ここまで来たよ

2 変数の離散型確率変数の同時分布

例で
6 枚のカードから無作為に 1 枚のカードを引く.
♡7　♡8　♡9 ◇8 ♠9 ♣9
離散型確率変数の同時分布
$X =$ 数, $Y = 0(\text{赤札}), 1(\text{黒札})$ とすると (x, y) を得る確率 f^{XY}_{xy} は,

$$f^{XY}_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{3} & ((x,y) = (8,0)) \\ \frac{1}{6} & ((x,y) = (9,0)) \\ \frac{1}{3} & ((x,y) = (9,1)) \\ \frac{1}{6} & ((x,y) = (7,0)) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

2 変数以上のとき同時分布 結合分布 joint distribution という
連続型確率変数のとき 2 変数の確率密度関数 $f^{XY}(x, y)$.

表で書いた方がまし．ここでは，「他」は省略．

$y \backslash x$	7	8	9	計
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	
1	0	0	$\frac{1}{3}$	
計				

離散型確率変数の周辺分布

同時分布 f_{xy}^{XY} に対して，

X の周辺分布 $f_x^{\mathrm{X}} = \sum_y f_{xy}^{\mathrm{XY}}$, Y の周辺分布 $f_y^{\mathrm{Y}} = \sum_x f_{xy}^{\mathrm{XY}}$.

要するに

連続型確率変数の周辺分布

$$f^{\mathrm{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{\mathrm{XY}}(x, y)\, \mathrm{d}y, \quad f^{\mathrm{Y}}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{\mathrm{XY}}(x, y)\, \mathrm{d}x$$

同時分布の母期待値

同時分布の母期待値

離散型 $$\mathrm{E}[\phi(X,Y)] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} f_{xy}^{\mathrm{XY}} \cdot \phi(x,y)$$

連続型 $$\mathrm{E}[\phi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{\mathrm{XY}}(x,y) \cdot \phi(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

L09-Q1

Quiz(多次元の確率変数の期待値)

2 変数の離散型確率変数 (X, Y) がある．同時分布 f_{xy}^{XY} が下の表で与えられる．

$y \backslash x$	1	2	3
0	0	2/12	1/12
2	4/12	0	5/12

1. 母期待値 $\mathrm{E}[X + 2Y]$ を求めよう．
2. 母期待値 $\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[Y \geq 1]}(X, Y)]$ を求めよう．
3. 周辺分布 f_x^{X}, f_y^{Y} を求めよう．

同時分布の母期待値の性質

$$\mathrm{E}[\phi_1(X,Y)+\phi_2(X,Y)] = \mathrm{E}[\phi_1(X,Y)] + \mathrm{E}[\phi_2(X,Y)]$$
$$\text{特に } \mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$$

なぜなら,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X+Y] &= \sum_x \sum_y f_{xy}^{\mathrm{XY}} \cdot (x+y) \\ &= \sum_x \sum_y f_{xy}^{\mathrm{XY}} \cdot x + \sum_x \sum_y f_{xy}^{\mathrm{XY}} \cdot y \\ &= \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y].\end{aligned}$$

X だけ, Y だけの関数の母期待値

x だけ, y だけの関数の母期待値や分散は,

下の左辺= $\boxed{}$ で計算しても

下の右辺= $\boxed{}$ で計算しても

同じ.

$$\mathrm{E}[\phi(X)] = \sum_x \sum_y f^{\mathrm{XY}}_{xy} \cdot \phi(x) = \sum_x \phi(x) \sum_y f^{\mathrm{XY}}_{xy} = \sum_x \phi(x) \cdot f^{\mathrm{X}}_x$$

$$\mathrm{E}[\phi(Y)] = \sum_x \sum_y f^{\mathrm{XY}}_{xy} \cdot \phi(y) = \sum_y \phi(y) \sum_x f^{\mathrm{XY}}_{xy} = \sum_y \phi(y) \cdot f^{\mathrm{Y}}_y$$

母共分散 covariance

X, Y が離散型 (連続型) 確率変数で, $\mu_{\mathrm{X}} = \mathrm{E}[X], \mu_{\mathrm{Y}} = \mathrm{E}[Y]$ であるとき,

$$\text{母共分散 } \mathrm{C}_{\mathrm{XY}} = \mathrm{E}[(X - \mu_{\mathrm{X}})(Y - \mu_{\mathrm{Y}})] = \cdots = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y].$$

さっきの問いで母共分散は?

独立性

確率変数 X, Y が同時分布 f_{xy}^{XY} を持つとする.
X, Y が独立とは,

$$f_{xy}^{\mathrm{XY}} = f_x^{\mathrm{X}} \times f_y^{\mathrm{Y}}$$

が成立することをいう (世の中には, 同値な定義が多数).

独立とは, X,Y が互いに $\boxed{}$

独立性と共分散

X, Y が独立なとき, 母共分散 $\mathrm{C_{XY}} = 0$.

すぐ後で証明.

母共分散 $\mathrm{C_{XY}} = 0$ は, X, Y が独立であるための $\boxed{}$ 条件.

L09-Q2

Quiz(離散型確率変数の独立性)

2 次元の離散型確率変数 (X, Y) を考える．同時分布 f_{xy}^{XY} は次の表で与えられる (現れない X, Y の確率は zero である).

$y \backslash x$	2	4
2	1/2	0
4	0	1/2

1. X, Y は独立かどうか判定しよう.
2. $\mathrm{E}[X], \mathrm{E}[Y], \mathrm{E}[XY], \mathrm{E}[X+Y], C_{\mathrm{XY}}$ を求めよう.

X, Y が独立であるとき‘だけ’成立する性質

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\phi_1(X) \times \phi_2(Y)] =& \mathrm{E}[\phi_1(X)] \times \mathrm{E}[\phi_2(Y)] \\ \text{特に } \mathrm{E}[XY] =& \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y] \\ \mathrm{V}[X+Y] =& \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[XY] &= \sum_x \sum_y f^{\mathrm{XY}}_{xy} \cdot x \cdot y \\ &= \sum_x \sum_y f^{\mathrm{X}}_x \times f^{\mathrm{Y}}_y \times x \times y \\ &= \sum_x f^{\mathrm{X}}_x \cdot x \times \sum_y f^{\mathrm{Y}}_y \cdot y = \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y] \\ \mathrm{V}[X+Y] =& \mathrm{E}[(X+Y)^2] - \mathrm{E}[X+Y]^2 \\ =& \mathrm{E}[X^2] + 2\mathrm{E}[XY] + \mathrm{E}[Y^2] - (\mathrm{E}[X]^2 + 2\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] + \mathrm{E}[Y]^2) \\ =& \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y] \end{aligned}$$

ここまで来たよ

3. 正規分布・確率変数の変数変換

4. 同時分布・確率変数の独立性・中心極限定理
   - 2 変数の確率分布
   - 独立同分布に従う確率変数の和
   - 中心極限定理

独立同分布の性質

独立同分布 (i.i.d.)

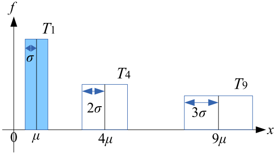
離散型/連続型確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が, たがいに独立で, すべて同じ確率分布に従う (同じ確率分布 f_x , 正規分布でなくてよい) とする.
これを $X_1, \ldots, X_n$ は**独立同分布に従う** (independent and identically-distributed) という.

新しい確率変数: $T_n = X_1 + \cdots + X_n$
母平均値 $\mathrm{E}[X_i] = \mu$, 母分散 $\mathrm{V}[X_i] = \sigma^2$ としたとき,

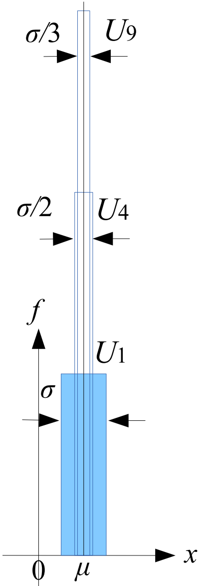
$$\mathrm{E}[T_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] = n \times \mu.$$

$$\mathrm{V}[T_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}[X_i] = n \times \sigma^2.$$

T_n の確率密度関数はこんな感じ?



U_n の確率密度関数はこんな感じ?



新しい確率変数: $U_n = \frac{1}{n}T_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$

$$\mathrm{E}[U_n] = \mathrm{E}\left[\tfrac{1}{n}T_n\right] = \frac{1}{n} \times n \times \mu.$$

$$\mathrm{V}[U_n] = \mathrm{V}\left[\tfrac{1}{n}T_n\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times n \times \sigma^2.$$

大数の弱法則と話があってる! 実際, これを使って大数の弱法則が証明できる

大数の (弱) 法則

$U_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は 母平均値 $\mu_\mathrm{X} = \mathrm{E}[X]$ に, 「必ず近い」
正確には $\forall\epsilon > 0 \lim_{n\to+\infty} P(|U_n - \mu_\mathrm{X}| \geq \epsilon) = 0$
(確率収束という)

証明　U_n に対するチェビシェフの不等式は, $\mu_{U_n} = \mu, \sigma^2_{U_n} = \sigma^2/n$ より,

$$P(|U_n - \mu_\mathrm{X}| \geq a \times \frac{\sigma_\mathrm{X}}{\sqrt{n}}) \leq \frac{1}{a^2}$$

$a = \frac{\epsilon}{\frac{\sigma_\mathrm{X}}{\sqrt{n}}}$ とすると, $n \to +\infty$ で

$$P(|U_n - \mu_\mathrm{X}| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2_\mathrm{X}}{\epsilon^2 n} \to 0$$

チェビシェフの不等式 Chebyshev's inequality

X: 離散型または連続型確率変数
$\mu_{\mathrm{X}} = \mathrm{E}[X]$: 母平均値
$\sigma_{\mathrm{X}}^2 = \mathrm{V}[X]$: 母分散
$a > 0$: 任意の正の実数
のとき次が成立する.

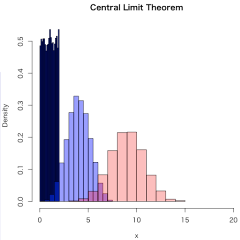
$$P(|X - \mu| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}$$

ここまで来たよ

3. 正規分布・確率変数の変数変換

4. 同時分布・確率変数の独立性・中心極限定理
   - 2 変数の確率分布
   - 独立同分布に従う確率変数の和
   - 中心極限定理

実は $n \to \infty$ で f の形は長方形から崩れていく．分布 $f(x)$ の個性が消える! っていうか美しい形に!



中心極限定理 (いいかげんバージョン)

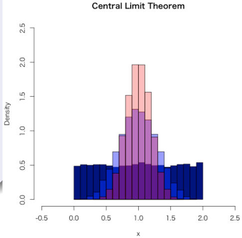
$X_1, \ldots, X_n$ が母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとき，

- $T_n = X_1 + \cdots + X_n$, の確率分布は，

  の $\boxed{}$ に似る

- $U_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ の確率分布は，

  $\boxed{}$ に似る



中心極限定理 (厳密バージョン)

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が, 母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとする. 正規分布じゃない. どんな分布でも可

$V_n = \frac{\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)-\mu}{\sigma} \times \sqrt{n}$ とすると,

V_n は, $n \to +\infty$ の極限で, $\mathrm{N}(0,1^2)$ に従う. すなわち

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leq V_n < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$$

「V_n は $\mathrm{N}(0,1^2)$ にしたがう Z に法則収束する」

法則収束とは, 関数列がある関数に収束すること.

証明

$\mathrm{E}[V_n] = 0, \mathrm{V}[V_n] = 1$ はすぐわかるが…

モーメント母関数を使うと瞬殺

L09-Q3

Quiz(中心極限定理)

確率変数 $X_1, \ldots, X_{10}$ は確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \leq x < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

の独立同分布に従う. ここで, f から $\mathrm{E}[X_i] = 1, \mathrm{V}[X_i] = \frac{1}{3}$ と求められる. $n = 10$ が大きいと思うと, 次はそれぞれ, 近似的にどのような分布に従うか, '母平均値が$\boxed{}$, 母分散が$\boxed{}$の$\boxed{}$分布' のように答えよう.

1. 確率変数 $T = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{10}$
2. 確率変数 $U = \frac{1}{10}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{10})$

連絡

- オフィスアワー月 4 木 6(1-502)

manaba 出席カード提出
`https://attend.ryukoku.ac.jp`