母分散の区間推定と検定・カイ二乗分布

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L13(2016-01-08 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2016-01-08 Fri 14:58 JST hig"

今日の目標

- 正規分布とカイ二乗分布, t 分布の関係が説明できる
- 母分散の区間推定ができる
- 母分散の検定ができる

http://hig3.net

L12-Q1
Quiz 解答:母比率の区間推定

1. 標本比率は $\hat{p} = \frac{35}{50} = 0.7$. 母比率 p を 0.7 と推定する.
2. ダミー変数の母分散は $0.7 \times (1 - 0.7) = 0.21$ と見積もられる.
   母比率 p の信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ の信頼区間は,

$$
\begin{aligned}
0.7 - 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{50} \cdot 0.21} < &p < 0.7 + 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{50} \cdot 0.21} \\
0.7 - 0.13 < &p < 0.7 + 0.13 \\
0.57 < &p < 0.83
\end{aligned}
$$

信頼係数 0.95 で当選ってことですね (放送用語「当選確実」).

3. 母比率 p の信頼係数 0.99 の信頼区間は,

$$
\begin{aligned}
0.7 - 2.58 \times \sqrt{0.0042} <& p < 0.7 + 2.58 \times \sqrt{0.0042} \\
0.7 - 0.17 <& p < 0.7 + 0.17 \\
0.53 <& p < 0.87
\end{aligned}
$$

信頼係数 0.99 のほうが慎重な判断基準ですが, それでも当選ってことですね.

L12-Q2

Quiz 解答:母平均値の検定 (母分散未知)=t 検定

1. 有意水準 0.05 で
2. 正規分布の母平均値に対する t 検定を行う.
3. 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 μ が $\mu_0 = 57\mathrm{g}$ に等しい」とする.

4. サイズ $n = 5$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を S^2 とするとき,
$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2/n}}$$
は, 自由度 $5-1$ の t 分布に従う. これを検定統計量として用いる.
5. この標本に対して, $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{51-57}{\sqrt{\frac{1}{5}\frac{16}{5-1}}} = -3\sqrt{5} = -6.708.$
6. t 分布表より, $t_{0.05/2}(4) = 2.776 < |t|$ だから, 帰無仮説を棄却する. ドーナツの重さの母平均値は 57g と異なる, と結論する. (注: このことを, 「有意」「有意差」などの言葉で表現する人もいる. 結果は有意である, 母平均値 μ は $\mu_0 = 57$g と有意に異なる, 母平均値 μ と $\mu_0 = 55$ の間には有意差がある, など)

L12-Q3

Quiz 解答:正規分布の母平均値に関する t 検定

1. 有意水準 0.05 で,

2. 正規分布の母平均値に対する t 検定を行う.
3. 帰無仮説を「ドーナツ販売開始後の, 来店客数の母平均値 μ は $\mu_0 = 196$ に等しい」とする.
4. サイズ $n = 4$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を S^2 とすると,

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2/n}}$$

は, 自由度 $4-1$ の t 分布に従う. これを検定統計量として用いる.
5. この標本に対して, $\bar{X} = 200, S^2 = \frac{224}{4-1} = 74.7$. よって, $t = \frac{200-196}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{224}{3}}} = 0.92582.$
6. t 分布表より, $t_{0.05/2}(3) = 3.182 > |t|$ だから, 帰無仮説は棄却できない. 来店客数が変化したとは結論できない.
(注: このことを, 「有意」「有意差」などの言葉で表現する人もいる. 結果は有意でなかった, 母平均値 μ と $\mu_0 = 57\mathrm{g}$ の間には有意差がない, など).

ここまで来たよ

3 統計的仮説検定

4 母分散の区間推定と検定・カイ二乗分布
- なぜカイ二乗分布
- 母分散の区間推定
- 母分散の検定

ばらつき (分散) のばらつきを考えたい

ポテトフライ S の重さのばらつきって? $\sqrt{\text{母分散}} \overset{\text{点推定}}{\longleftarrow} \sqrt{\text{不偏標本分散}}$

- 母分散の点推定の精度って?

	の点推定	の区間推定
母平均値 μ	標本平均値 $\overline{X} = \frac{1}{n}[X_1 + \cdots]$	$\overline{X} - \square\sqrt{\quad} < \mu < \overline{X} + \square\sqrt{\quad}$
母分散 σ^2	不偏標本分散 $S^2 = \frac{1}{n-1}[(X_1 - \overline{X})^2 + \cdots]$	$? < \sigma^2 < ?$

- 標本平均値の分布はほぼ正規分布 $\leftarrow$
- 不偏標本分散の分布は

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ のとき,

$2Z$

$Z + 3$

$2Z + 3$

Z^2

$Z_1^2 + Z_2^2$

$\vdots$

$Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2$

カイ二乗分布

カイ二乗分布 (χ^2 分布)

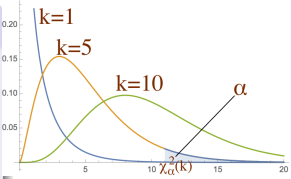
$Z_1, \ldots, Z_k$: 標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う独立な確率変数とするとき,
確率変数 $Y = Z_1^2 + \cdots + Z_k^2$ とおく.
Y は, 自由度 k のカイ二乗分布 $\chi^2(k)$ に従う.

$Y = \chi^2$ などと書くことも.

言語	小	大	読み
英語	x	X	エクス
ギリシャ語	χ	X	カイ

$\chi^2(k)$ の確率密度関数

$$f_k(y) = \begin{cases} C_k \times y^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y} & (y \geq 0) \\ 0 & (他) \end{cases}$$



$\mathrm{E}[Y] = E[Z_1^2 + \cdots + Z_k^2] = k, \mathrm{V}[Y] = 積分 = 2k.$

$\frac{1}{C_k} = \int_0^\infty y^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}\, \mathrm{d}y = (\frac{k}{2})! 2^{\frac{k}{2}}.$

ここまで来たよ

不偏標本分散のしたがう分布

不偏標本分散のしたがう分布

確率変数 X が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うとする．サイズ n の標本の不偏標本分散

$$S^2 = \frac{1}{n-1}((X_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2)$$

を考えたとき，

$$Y = (n-1) \times \frac{S^2}{\sigma^2}$$

は自由度 $k = n-1$ の カイ二乗分布 $\chi^2(n-1)$ に従う．

$Y \sim \chi^2(k)$ のとき，$\frac{Y}{k}(\simeq 1)$ が，分散の比．「かける」補正係数．

証明じゃないけど説明

独立な $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して,

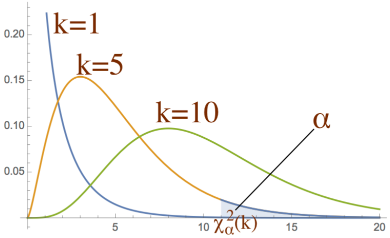
$$n \times \frac{1}{n}\left[\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

は自由度 n のカイ二乗分布 $\chi^2(n)$ にしたがう.
不偏標本分散 S^2 に対して,

$$(n-1) \times \frac{S^2}{\sigma^2} = (n-1) \times \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{X_1 - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \overline{X}}{\sigma}\right)^2\right]$$

は自由度は $n-1$ のカイ二乗分布 $\chi^2(n-1)$ にしたがう.
$-\mu$ でなく $-\overline{X}$ であるため自由度 $n-1$.

母分散の区間推定



$\chi^2_\alpha(k)$ の定義

$\alpha = P(\chi^2 > \chi^2_\alpha(k))$.

$\chi^2_\alpha \times (k)$ でないので大注意.

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < (n-1) \times \frac{s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

母分散の信頼区間

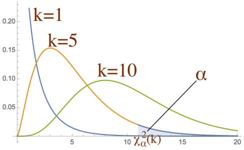
σ^2 について解いて, 標本の不偏標本分散が s^2 のとき, 信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$\frac{(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \times s^2 < \sigma^2 < \frac{(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \times s^2$$

カイ二乗分布表

有意水準 α, 自由度 k に対して, $\alpha = P(Y > \chi^2_\alpha(k))$ となる $\chi^2_\alpha(k)$ の値の表.

$k\backslash\alpha$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.00003927	0.0001571	0.0009821	0.003932	0.01579	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.01003	0.02010	0.05064	0.1026	0.2107	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	0.07172	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.6757	0.8721	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2



L13-Q1

Quiz(母分散の区間推定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは正規分布に従うという.
お店で 9 個のポテトフライ S サイズを買って重さを量り, サイズ 9 の標本とした. このとき
標本平均値は 80g, 不偏標本分散は $72\mathrm{g}^2$ だった.
母分散を信頼係数 $1-\alpha=0.95$ で区間推定しよう.

L13-Q2

Quiz(母分散の区間推定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは正規分布に従うという.

お店で 9 個のポテトフライ S サイズを買って重さを量ったところ, 下のようだった (単位は g).

$$78, 78, 78, 78, 80, 82, 82, 82, 82$$

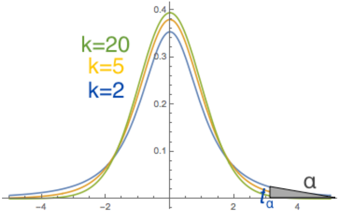
母平均値と母分散を信頼係数 $1-\alpha=0.95$ で区間推定しよう.

t 分布とは

t 分布

確率変数 Z が標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$, 確率変数 Y が自由度 k のカイ二乗分布 $\chi^2(k)$ にしたがい, Z と Y が独立であるとき, 連続型確率変数 $T=\frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$ のしたがう分布を自由度 k の (スチューデントの, またはゴセットの)t 分布という.

だから, 標本平均値 $\overline{X}$ から作った統計量 $T=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2}}=\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}}=\frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$ は t 分布にしたがう.



k が小さいとずれが大きいが, $k\to+\infty$ では Y と Z はほぼ同じ.
なぜなら, $\mathrm{E}[Y]=k$ で, $\mathrm{V}[Y]=2k$ より分布の幅は小さいから.

ここまで来たよ

母分散のカイ二乗検定 (母平均値未知)

未知の正規分布からの標本に基づき, 母分散が σ_0^2 かどうか判定したい!(σ_0^2 でないと言いたい)
(背理法の仮定)$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の (μ, σ 未知), サイズ n の標本だとする.

- 対立仮説 H_1 母分散 $\sigma \neq \sigma_0$.
- 帰無仮説 H_0 母分散 $\sigma = \sigma_0$.

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < (n-1) \times \frac{S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1 - \alpha.$$

母分散のカイ二乗検定の棄却域

有意水準 α での棄却域は, 上の不等式の定める区間の外側

$$S^2 < \sigma_0 \times \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{n-1}, \quad \sigma_0 \times \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{n-1} < S^2$$

L13-Q3

Quiz(母分散の検定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは, 母分散 $\sigma_0^2 = 4\mathrm{g}^2$ の分布であることが定められているという.
トレーニング中のアルバイトの人に, ポテトフライ S サイズを 9 個作ってもらったところ, 重さは下のようだった (単位は g).

$$76, 76, 76, 76, 80, 84, 84, 84, 84.$$

このアルバイトの作るポテトフライ S の重さの母分散 σ_1^2 は, σ_0^2 と異なるか? アルバイトのほうの重さが正規分布にしたがうと仮定し, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 母分散のカイ二乗検定で判定しよう.

連絡

- 来週 2016-01-15 金 2 の授業は 1-542 実習室.
- **t 検定のレポート (個人別課題)**. RaMMoodle `https://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle/` のコースからダウンロードできます. 2016-01-08 金 2 の授業, または, 2016-01-14 木昼までの Math ラウンジで提出.
- オフィスアワー月 4 木 6(1-502)

manaba / 出席カード
`https://manaba.ryukoku.ac.jp`

ファイナルトライアル出題計画

外部記憶ペーパー使えます．電卓使用なし．必要な表は印刷します．
2014 年度の過去問題を公開していますが，出題傾向は毎年変わります．去年のものに対応するより，下の出題計画と非参照 Quiz を参照することをお奨めします．
大注意:この計画は確定版ではありません．2016-01-22 金までに精密化・確定します．

- 連続型確率変数の確率・母期待値・母平均値・母分散を求める (プチテスト再出題)
- 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ にしたがう確率変数が，ある条件を満たす確率を求める (L08)
- 確率変数の変数変換で $\mathrm{E}[aX+b], \mathrm{V}[aX+b]$ を計算する (L08, 大注意．非参照 Quiz の問題になっていません)
- 2 変数確率変数の母期待値・母共分散を求める (L09)
- 標本から母平均値を点推定・区間推定する (L10,L11)
- 標本から母分散を点推定・区間推定する (L10,L13)
- 標本から母比率を点推定・区間推定する (L10,L12)
- 標本から母平均値の t 検定を行う (L12)
- 標本から母分散のカイ 2 乗検定を行う (L13)
- 標本抽出と推定と検定の意味に関する選択肢的な問 (数個)