統計的仮説検定と Excel による t 検定

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L14(2016-01-15 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2016-01-15 Fri 14:03 JST hig"

今日の目標

- 母分散のカイ二乗検定ができる
- 検定の第 1 種の過誤, 第 2 種の過誤, 信頼係数, 検出力, p 値, 棄却域が説明できる
- Excel で p 値を求めてカイ二乗検定, t 検定できる.

http://hig3.net

L13-Q1

Quiz 解答:母分散の区間推定

標本サイズは $n=9$ である.

母分散 σ^2 の信頼係数 0.95 の信頼区間は,

$$S^2 \times \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < S^2 \times \frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$$

$$72 \cdot \frac{8}{17.53} < \sigma^2 < 72 \cdot \frac{8}{2.180}$$

$$32.85 < \sigma^2 < 264.2$$

L13-Q2

Quiz 解答:母分散の区間推定

標本サイズは $n=9$ である.

標本平均値は, $\overline{X} = \frac{1}{9}[78 + \cdots + 82] = 80\mathrm{g}$.

不偏標本分散は, $S^2 = \frac{1}{9-1}[(78-80)^2 + \cdots + (82-80)^2] = 4\mathrm{g}^2$.

よって, 母平均値 μ は 80g, 母分散 σ^2 は $4\mathrm{g}^2$ と推定する.

母平均値 μ の信頼係数 0.95 の信頼区間は,

$$
\begin{aligned}
\overline{X} - t_{0.025}(9-1)\sqrt{\frac{S^2}{n}} <& \mu < \overline{X} + t_{0.025}(9-1)\sqrt{\frac{S^2}{n}} \\
80 - 2.306\sqrt{\frac{4}{9}} <& \mu < 80 + 2.306\sqrt{\frac{4}{9}} \\
78.46 <& \mu < 81.54.
\end{aligned}
$$

母分散 σ^2 の信頼係数 0.95 の信頼区間は,

$$
\begin{aligned}
S^2 \times \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} <& \sigma^2 < S^2 \times \frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \\
4 \cdot \frac{8}{17.53} <& \sigma^2 < 4 \cdot \frac{8}{2.180} \\
1.825 <& \sigma^2 < 14.68
\end{aligned}
$$

ここまで来たよ

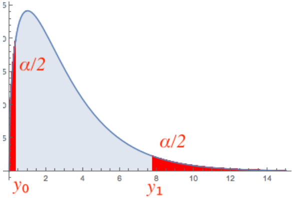
3. 母分散の区間推定と検定・カイ二乗分布
4. 統計的仮説検定と Excel による t 検定
   - 母分散のカイ二乗検定
   - 統計的仮説検定の有意水準と検定力
   - Excel で検定

母分散のカイ二乗検定 (母平均値未知)

未知の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ からの標本に基づき, 母分散が σ_0^2 かどうか判定したい!(σ_0^2 でないと言いたい)

- 対立仮説 H_1 母分散 $\sigma \neq \sigma_0$.
- 帰無仮説 (背理法の仮定) H_0 母分散 $\sigma = \sigma_0$.

サイズ n の標本の不偏標本分散を S^2 とすると, 帰無仮説のもとで, 検定統計量 $Y = (n-1) \times \frac{S^2}{\sigma_0^2}$ は, 自由度 $n-1$ のカイ二乗分布にしたがう.



$$y_0 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), y_1 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

極端でない確率 $1-\alpha=0.95$ などのケースを考えると,

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < (n-1)\times\frac{S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha.$$

逆に, S^2 が上を満たさないとき, すなわち, S^2 の棄却域

$$S^2 < \sigma_0^2 \times \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{n-1}, \text{または} \sigma_0^2 \times \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{n-1} < S^2$$

に含まれるとき, 帰無仮説を棄却する.

L14-Q1
TA Prob and Sol:母分散の検定

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは, 母分散 $\sigma_0^2 = 4\mathrm{g}^2$ の分布であることが定められているという.
トレーニング中のアルバイトの人に, ポテトフライ S サイズを 9 個作ってもらったところ, 重さは下のようだった (単位は g).

$$76, 76, 76, 76, 80, 84, 84, 84, 84.$$

このアルバイトの作るポテトフライ S の重さの母分散 σ^2 は, σ_0^2 と異なるか? アルバイトのほうの重さが正規分布にしたがうと仮定し, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 母分散のカイ二乗検定で判定しよう.

略解

1. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で,
2. 母分散のカイ二乗検定を行う.

3. 帰無仮説を，「アルバイトの…重さの正規分布の母分散 σ^2 は，$\sigma_0^2 = 4$ に等しい」とする
4. サイズ n の標本の不偏標本分散を S^2 とすると，量 $\chi^2 = (n-1) \times \frac{s^2}{\sigma_0^2}$ は，自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従う．この量を検定統計量として用いる．
5. この標本に対して $\chi^2 = (n-1) \times \frac{s^2}{\sigma_0^2} = (9-1) \cdot \frac{16}{4} = 32.$
6. カイ二乗分布表より，この値は，棄却域 $\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = 2.180$, $\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = 17.53$ に含まれるので帰無仮説を棄却する．母分散は有意に $\sigma_0^2 = 4$ と異なると結論する．

棄却域に含まれなかったときの書き方は，「棄却域に含まれないので帰無仮説は棄却できない．母分散と σ_0^2 が異なるとは結論できない (母分散と σ_0^2 との差は有意でない).」
最後のステップでは，p 値を使った別解法「 Excel で p 値を求めると，$p = 1.9 \times 10^{-4} < \alpha$ なので，帰無仮説を棄却する」がある．

ここまで来たよ

3 母分散の区間推定と検定・カイ二乗分布

4 統計的仮説検定と Excel による t 検定
- 母分散のカイ二乗検定
- 統計的仮説検定の有意水準と検定力
- Excel で検定

有意水準と検出力

統計的検定

あるくじ付きお菓子は, 工場で, $q_0 = 0.03$ の確率で独立に当たりを混ぜることになっている.
工場の当たりくじ混ぜ込みマシンが異常でないか調べたい.

- 対立仮説 H_1 実際の当たり確率 $q \neq q_0$
- 帰無仮説 H_0 実際の当たり確率 $q = q_0$
- 提案する検定: 100 個からなる標本のうちの当たりくじの個数 X を検定統計量とする. 当たりが $X = 0, 5, 6, \ldots, 100$ 個という極端な値であるときには帰無仮説を棄却する「マイ検定」を使ってみよう.

L14-Q2

2 項検定

実際の当たり確率が $q_0 = 0.03$ であるときに, 提案した検定で, 帰無仮説を間違えて棄却してしまう確率 α を求めよう.

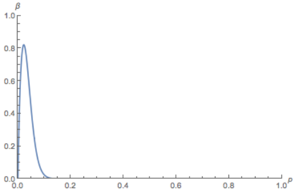
このような誤りを $\boxed{}$, 誤りの起こる確率 α を 検定の $\boxed{}$ という.

α は小さい方がいい.

L14-Q3

2 項検定

実際の当たり確率が $q(\neq q_0)$ であるときに，提案した検定で，帰無仮説を棄却できない確率 β を求めよう．



このような誤りを $\boxed{\quad\quad}$，誤りの起こらない確率 $1-\beta$ を検定の $\boxed{\quad\quad}$ という．

β は小さい方がいい．

過誤, 有意水準, 検出力

		真実	
		H_0 は真	H_0 は偽
判断	H_0 を棄却しない	正しい判断	第 2 種の過誤 (確率 β で起きる)
	H_0 を棄却	第 1 種の過誤 (確率 α で起きる)	正しい判断

α: 有意水準

$1-\alpha$: 区間推定でいう $\boxed{}$ に対応

$1-\beta$: 検出力 or 検定力

ふつうは, β を小さくしようとすると α が大きくなってしまう.
ふつうは, α を指定の値に固定して, β をなるべく小さくするという作戦.

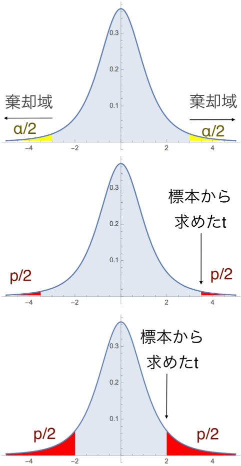
p 値 (t 分布の例)

標本の p 値 (p-value)

帰無仮説のもとで, 検定統計量がこの標本よりも

確率.

p 値 $<$ 有意水準α のときに 帰無仮説を棄却する.



帰無仮説棄却

帰無仮説採用

ここまで来たよ

3. 母分散の区間推定と検定・カイ二乗分布

4. 統計的仮説検定と Excel による t 検定
   - 母分散のカイ二乗検定
   - 統計的仮説検定の有意水準と検定力
   - Excel で検定

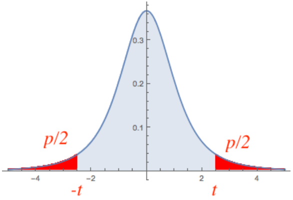
Excel 2013 で標本ナントカ

標本にまつわる Excel の関数

- 標本平均値 `average`
- 不偏標本分散 `var`
- 不偏標本標準偏差 `stdev`

注: 有限母集団の量は母平均値 `average`, 母分散 `varp`, 母標準偏差 `stdevp`. 要区別

Excel 2013 での t 分布



n: 自由度

t 分布にまつわる Excel の関数

- $\frac{p}{2}$ =`t.dist.rt`(t, n)
- t =`t.inv`$(\frac{p}{2}, n)$

ご注意

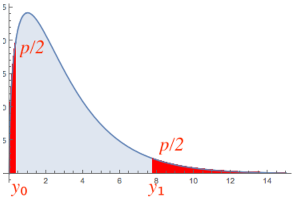
- Excel のバージョンで異なる
- Excel はバグがあるから信じない，という人も． → R 確率統計☆演習 II, 計算科学 II

Excel を用いた t 検定の手順

- 標本平均値と不偏標本分散を計算
- T 統計量を計算
- T に対する p 値を計算
- $p < \alpha$ なら帰無仮説棄却

実は分析ツールの中にも t 検定があるが，それは「2 標本 t 検定」 確率統計☆演習 II

Excel 2013 でのカイ二乗分布



n: 自由度

カイ二乗 t 分布にまつわる Excel の関数

- $\frac{p}{2}$ =chisq.dist.rt(y_1, n)
- $1 - \frac{p}{2}$ =chisq.dist.rt(y_0, n)
- y_1 =chisq.inv($\frac{p}{2}, n$)
- y_0 =chisq.inv($1 - \frac{p}{2}, n$)

連絡

- t 検定と同じのりでカイ二乗検定のレポート．2016-01-18 月以降にダウンロード印刷 → 2016-01-29 金 3 までの Math ラウンジに提出.
- 予習問題, 非参照 Quiz はきょうが最後です.
- 2016-01-29 金 2 ファイナルトライアル．外部記憶ペーパーが使用可能．出題計画は 2016-01-22 金に確定.
- 配布資料は 1-503 向かいの引出, `http://hig3.net` で再配布.
- Quiz の略解は授業終了後に `http://hig3.net` で配布.
- オフィスアワー月 4 木 6(1-502)

manaba / 出席カード
`https://manaba.ryukoku.ac.jp`