確率統計☆演習 I プチテスト

樋口さぶろお[1]　配布: 2016-11-17 木　更新: Time-stamp: "2016-12-09 Fri 10:52 JST hig"

プチテスト参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

過程不要

次のデータを考える.

$12, 18, 20, 22, 22, 23, 23, 23, 26.$

1. 最頻値を求めよう.
2. 平均値を求めよう.
3. 中央値を求めよう.
4. 第 1 四分位数を求めよう.
5. 第 3 四分位数を求めよう.

2

過程不要

あるお菓子の重さを測ったデータ x(g) の四分位数などが次のように与えられる. 箱ひげ図を描こう. 箱ひげのどの部分がどの値かわかるように, 座標軸上に, 箱やひげの位置を数値でを記すこと. 箱ひげ図を描くのに不要なデータも記されている.

最大値	55g
第 3 四分位数	52g
第 1 四分位数	48g
最小値	40g
中央値	51g
最頻値	50g
平均値	49g
範囲	15g
標準偏差	3g
四分位範囲	4g
四分位偏差	2g

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

3

次の 20 点満点のテストの点数のデータ x を考える.

$$4, 16, 8, 12, 10$$

平均値は $\overline{x} = 10$, 分散 $s_x^2 = 16$ である.

1. 16 点という値の標準得点を求めよう.
2. 8 点という値の偏差値を求めよう.

4

次は, ある材料と製法で作った棒の長さ $x$cm と質量 yg のデータである.

x(cm)	y(g)
9	40
9	45
9	50
10	50
10	50
10	50
10	50
10	55
11	55
12	55

平均値はそれぞれ, $\overline{x} = 10\text{cm}$, $\overline{y} = 50\text{g}$ である. 次の量を, (単位があるものには) 単位をつけて答えよう.

1. x の分散 s_x^2.
2. x と y の共分散 s_{xy}
3. x と y の相関係数 r

5

過程不要

ある 2 変量データ (x, y) について次のことがわかっている.

x の平均値 $\overline{x}$	9
y の平均値 $\overline{y}$	-4
x の分散 s_x^2	49
y の分散 s_y^2	36
x, y の共分散 s_{xy}	-25
(x, y) のデータの個数 n	16

このとき, 回帰直線の式を, x, y の式で書こう. 整理しなくてよい.

6

過程不要
次のうち正しいものに $\circ$, 正しくないものに $\times$ をつけよう.

1. 連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ の, グラフの $0 \leq y \leq f(x)$ の部分の面積は母平均値に等しい.
2. 確率密度関数 $f(x)$ を持つ連続型確率変数 X の母標準偏差は, $f(x)$ のグラフの $0 \leq y \leq f(x)$ の部分の「幅」を表す量 (だいたい比例する量) である.
3. あるクラスで, 学力テスト 1 は平均点が 50 点, 標準偏差が 15 点, 学力テスト 2 は平均点が 60 点, 標準偏差が 5 点だった. ある生徒は学力テスト 1 に 70 点, 学力テスト 2 に 70 点をとった. この生徒がよりよい相対評価を得られるのは, 学力テスト 2 である.
4. あるクラスの, 身長 (から 1m をひいたもの) 体重のデータ $(x\mathrm{m}, y\mathrm{kg})$ の相関係数は 0.8 だった. cm, g に直したデータ $(100 + 100x\mathrm{cm}, 1000y\mathrm{g})$ の相関係数は 0.08 である.
5. クラスの身長を cm で測ったデータの分散が $400\mathrm{cm}^2$ であったとき, 同じクラスの身長を m で測ったデータの分散は $0.04\mathrm{m}^2$ である.

7

連続型確率変数 X は次の確率密度関数 $f(x)$ に従う.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (\frac{5}{2} \leq x < 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[\cos(\pi X)]$ を求めよう.
2. 確率 $P(\frac{22}{8} < X < \frac{23}{8})$ を求めよう.

8

離散型確率変数 X の確率分布は

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{7} & (x = 0) \\ \frac{1}{7} & (x = 7) \\ \frac{2}{7} & (x = 14) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

で与えられる.

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. 確率変数 $Y = 1 - 2X$ について, $\mathrm{E}[Y]$, $\mathrm{V}[Y]$ を求めよう.
4. 確率 $P(\sin \frac{X}{10}\pi > 0)$ を求めよう.

9

連続型確率変数 X は次の確率密度関数 $f(x)$ に従う.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}x & (-2 \leq x < 0) \\ +\frac{1}{12}x & (0 \leq x < 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. 確率 $P(|X| < 1)$ を求めよう.
4. 母期待値 $\mathrm{E}[\frac{\mathrm{e}^X}{X}]$ を求めよう.

10

確率変数 X の母平均値, 母分散は次を満たす.

$$\mathrm{E}[X] = 3, \quad \mathrm{V}[X] = 10.$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[2X^2 - 3X + 2]$ を求めよう.
2. 確率変数 $Y = -3X + 2$ の母分散 $\mathrm{V}[-3X + 2]$ を求めよう.

11

離散型確率変数 X, Y の同時分布は次の表で与えられる.

$y \backslash x$	1	3
2	1/7	2/7
4	0	4/7

で与えられる.

1. 母期待値 $\mathrm{E}[X^2 + XY]$ を求めよう.
2. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. 母共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y]$ を求めよう.

確率統計☆演習 I プチテスト略解

樋口さぶろお[2]　配布: 2016-11-17 木更新: Time-stamp: "2016-12-09 Fri 10:52 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. 参加者はすべての過程を記す必要があります.

配点　各問配点ばらばら, 計 100 点.

1

1. 最頻値 $= 23$
2. 平均値 $= 21$
3. 中央値 $Q_2 = 22$
4. $Q_1 = 19$
5. $Q_3 = 23$

配点　1-5:各 2 点, 計 10 点.

2

- 最小値 左のひげの端
- 第 1 四分位値 箱の左辺
- 中央値 箱の真ん中の線
- 第 3 四分位値 箱の右辺
- 最大値 右のひげの端
- 平均値 $+$

配点　最大値, 最小値, 第 1 四分位数, 第 3 四分位数, 中央値, 平均値: 各 1 点, 計 6 点.

講評　平均値は $\times$ でなく $+$ がふつうです. ひげの横棒は点線のほうがふつうですが, 教科書や高校数学では実線です.

3

1. 標準得点 $z = (16 - 10)/\sqrt{16} = 1.5.$
2. 偏差値 $w = (8 - 10)/\sqrt{16} \times 10 + 50 = 45.$

配点　1,2:各 3 点, 計 6 点.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

講評　いずれも単位はありません.

4

1. $s_x^2 = \frac{1}{10}[(9-10)^2 + \cdots] = 0.8\mathrm{cm}^2$.
2. $s_{xy} = \frac{1}{10}[((9-10)(40-50) + \cdots] = 3\mathrm{cm}\cdot\mathrm{g}$.
3. y の分散は $s_y^2 = 20\mathrm{g}^2$. よって, $r = \frac{3\mathrm{cm}\cdot\mathrm{g}}{\sqrt{0.8\mathrm{cm}^2}\sqrt{20\mathrm{g}^2}} = 0.75$.

配点　1,2,3:各 4 点, 計 12 点.

講評　単位は必須です.

5

$y + 4 = \frac{-25\sqrt{36}}{\sqrt{49}\sqrt{36}\sqrt{49}} \times (x - 9)$.

配点　3 点. 傾きだけあってる, 平均値を通っているだけ, のものは 1 点.

6

1. ×
2. ◯
3. ◯
4. ×
5. ◯

配点　1-5:各 2 点, 計 10 点.

7

1. $\mathrm{E}[\cos(\pi X)] = \int_{5/2}^{3} 2\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x = [\frac{2}{\pi}\sin(\pi x)]_{5/2}^{3} = -\frac{2}{\pi}$
2. $P(\frac{22}{8} < X < \frac{23}{8}) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\frac{22}{8}<X<\frac{23}{8}]}(X)] = \int_{22/8}^{23/8} 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$.

配点　1,2:各 4 点, 計 8 点.

8

1. $\mathrm{E}[X] = \frac{4}{7} \cdot 0 + \frac{1}{7} \cdot 7 + \frac{2}{7} \cdot 14 = 5.$
2. $\mathrm{E}[X^2] = \frac{4}{7} \cdot 0^2 + \frac{1}{7} \cdot 7^2 + \frac{2}{7} \cdot 14^2 = 63.$ $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = 38.$
   別解 $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X-5)^2].$
3. $\mathrm{E}[1-2X] = 1 - 2\mathrm{E}[X] = -9.$ $\mathrm{V}[1-2X] = (-2)^2\mathrm{V}[X] = 152.$
4. $\sin \frac{0}{10}\pi = 0, \sin \frac{7}{10}\pi > 0, \sin \frac{14}{10}\pi < 0$ に注意して, $P(\sin \frac{X}{10}\pi > 0) = \frac{4}{7} \cdot 0 + \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{2}{7} \cdot 0 = \frac{1}{7}.$

配点　1-4:各 3 点, 計 15 点.

9

1. $\mathrm{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x \,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} -\frac{1}{6}x \times x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} \frac{1}{12}x \times x \,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$
2. $\mathrm{E}[X^2] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} -\frac{1}{6}x \times x^2 \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} \frac{1}{12}x \times x^2 \,\mathrm{d}x = 6.$
   $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \frac{38}{9}.$
   (計算がたいへんな別解) $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X - \frac{4}{3})^2].$
3. $P(|X| < 1) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[|X|<1}(X)] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathbf{1}_{[|X|<1]}(x) \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{6}x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{12}x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}.$
4. $\mathrm{E}[\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{\mathrm{e}^x}{x} \,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} -\frac{1}{6}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} \frac{1}{12}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(\mathrm{e}^{-2} - 1) + \frac{1}{12}(\mathrm{e}^4 - 1) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2} + \frac{1}{12}\mathrm{e}^4.$

配点　1-4:各 3 点, 計 12 点.

講評　正値関数の定積分は正なので, 2 の $\mathrm{E}[X^2]$ や 3 にでてくる各定積分は正になるはず. 一方, 1,3 は $x < 0$ 部分は負, $x > 0$ 部分は正になるはず.
$\mathrm{E}[X^2/X] \neq \mathrm{E}[X^2]/\mathrm{E}[X]$ と同様に, $\mathrm{E}[e^X/X] \neq \mathrm{E}[e^X]/\mathrm{E}[X].$

10

1. $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$ より, $\mathrm{E}[X^2] = 10 + 3^2 = 19.$ $\mathrm{E}[2X^2 - 3X + 2] = 2\mathrm{E}[X^2] - 3\mathrm{E}[X] + 2 = 38 - 9 + 2 = 31.$
2. $\mathrm{V}[-3X + 2] = (-3)^2\mathrm{V}[X] = 90.$

配点　1-2:各 3 点, 計 6 点.

講評　$\mathrm{E}[X^2] \neq \mathrm{E}[X]^2.$ この差が母分散なんでしょ.

11

$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{6}{7} \cdot 3 = \frac{19}{7}$,
$\mathrm{E}[Y] = \frac{3}{7} \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot 4 = \frac{22}{7}$,
$\mathrm{E}[X^2] = \frac{1}{7} \cdot 1^2 + \frac{6}{7} \cdot 3^2 = \frac{55}{7}$,
$\mathrm{E}[XY] = \frac{1}{7} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{2}{7} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{62}{7}$.

1. $\mathrm{E}[X^2 + XY] = \frac{55}{7} + \frac{62}{7} = \frac{117}{7}$.
2. $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \frac{24}{49}$.
3. $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] = \frac{16}{49}$.

配点　1-3:各 4 点, 計 12 点.