確率不等式・多次元の確率分布

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I L07(2016-11-10 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2016-11-11 Fri 07:09 JST hig"

今日の目標

- チェビシェフの不等式から母平均値・母分散の意味を説明できる 塚田確率統計 3.5
- 同時分布から 2 つの確率変数の母共分散, 母相関係数が計算できる 塚田確率統計 3.6
- 確率変数の独立性が判定できる 塚田確率統計 2.4

L06-Q1
Quiz 解答:連続的な値をとる確率変数

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathbf{1}_{[X\geq\frac{1}{4}]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1/4}^{1/2} 8x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}.$$
2. $$\mathrm{E}[X] = \int_0^{1/2} f(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = 1/3.$$
3. $$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \tfrac{1}{8} - (\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{1}{72}.$$
4. $$\mathrm{E}[\tfrac{1}{\sqrt{X}}] = 2^{5/2}/3.$$

L06-Q2
Quiz 解答:連続型確率変数

1. $\frac{23}{12}$
2. $\frac{7}{8}$
3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\log 3 - \log 2)$.

L06-Q3

Quiz 解答:一様分布

1. $\mathrm{E}[1] = 1$ より, $C = \frac{1}{b-a}$.
2. $\mathrm{E}[X] = \frac{a+b}{2}$.
3. $\sqrt{\mathrm{V}[X]} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \simeq \frac{b-a}{3.5}$.

ここまで来たよ

1. 確率変数
   - 確率不等式

2. 確率不等式・多次元の確率分布
   - 2 次元の確率分布
   - 母共分散と独立性

チェビシェフの不等式 塚田確率統計 §3.5

チェビシェフの不等式 Chebyshev's inequality

X: 離散型または連続型確率変数
$\mu = \mathrm{E}[X]$: 母平均値
$\sigma^2 = \mathrm{V}[X]$: 母分散
$a > 0$: 任意の正の実数
のとき次が成立する.

$$P(|X-\mu| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}$$

どんな X にも使えて便利な不等式. 意味は…

チェビシェフの不等式の証明

$P(|X-\mu| \geq a\sigma)$ を $f(x)$ の積分で書くと…

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| \geq a\sigma) &= \int_{-\infty}^{\mu-a\sigma} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mu+a\sigma}^{+\infty} \text{同じ} \\
&\leq \int_{-\infty}^{\mu-a\sigma} f(x) \times \frac{(x-\mu)^2}{(a\sigma)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\mu+a\sigma}^{+\infty} \text{同じ} \\
&\leq \frac{1}{(a\sigma)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times (x-\mu)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(a\sigma)^2} \mathrm{V}[X] \\
&= \frac{1}{a^2}.
\end{aligned}
$$

問 一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$ で, $a=1,2$ のときに, 不等式の両辺の値を計算してみると?

ここまで来たよ

1. 確率変数
   - 確率不等式
2. 確率不等式・多次元の確率分布
   - 2 次元の確率分布
   - 母共分散と独立性

2 つの離散型確率変数の同時分布

塚田確率統計 §3.6 高校 数学 B

例 6 枚のカードから無作為に 1 枚引く. ♡7 ♡8 ♡9 ◇8 ♠9 ♣9

2 つの離散型確率変数の同時分布

$X =$ 数, $Y = 0(\text{赤札}), 1(\text{黒札})$ とすると (x, y) を得る確率は 2 変数の確率関数

$$f_{\mathrm{XY}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & ((x,y) = (8,0)) \\ \frac{1}{6} & ((x,y) = (9,0)) \\ \frac{1}{3} & ((x,y) = (9,1)) \\ \frac{1}{6} & ((x,y) = (7,0)) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

2 次元の確率分布の 同時分布, 結合分布, joint distribution という

連続型確率変数のとき 2 変数の確率密度関数 $f_{\mathrm{XY}}(x,y)$. 確率統計☆演習 II(2017)L

表で書いた方がまし．ここでは，「他」は省略．

$y \backslash x$	7	8	9	計
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	
1	0	0	$\frac{1}{3}$	
計				

離散型確率変数の周辺分布

同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x,y)$ に対して，
X の周辺分布 $f_{\mathrm{X}}(x)$, Y の周辺分布 $f_{\mathrm{Y}}(y)$ は，

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \sum_y f_{\mathrm{XY}}(x,y), f_{\mathrm{Y}}(y) = \sum_x f_{\mathrm{XY}}(x,y).$$

要するに

連続型確率変数の周辺分布

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{XY}}(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad f_{\mathrm{Y}}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{XY}}(x,y)\,\mathrm{d}x$$

同時分布が与えられたときの母期待値高校 数学 B

同時分布が与えられたときの母期待値

離散型 $\mathrm{E}[\phi(X,Y)] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{XY}}(x,y) \cdot \phi(x,y)$

連続型 $\mathrm{E}[\phi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{XY}}(x,y) \cdot \phi(x,y) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

L07-Q1

Quiz(多次元の確率変数の期待値)

2 変数 X, Y の離散型確率分布を考える．同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ が下の表で与えられる．

$y \backslash x$	1	2	3
0	0	2/12	1/12
2	4/12	0	5/12

1. 母期待値 $\mathrm{E}[X + 2Y]$ を求めよう．
2. 母期待値 $\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[Y \geq 1]}(X, Y)]$ を求めよう．
3. 周辺分布 $f_{\mathrm{X}}(x)$, $f_{\mathrm{Y}}(y)$ を求めよう．

2 次元の確率分布の母期待値の性質 塚田確率統計 §3.6 高校 数学 B

$$\mathrm{E}[\phi_1(X,Y)+\phi_2(X,Y)] = \mathrm{E}[\phi_1(X,Y)] + \mathrm{E}[\phi_2(X,Y)]$$

$$\text{特に } \mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$$

なぜなら,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X+Y] &= \sum_x \sum_y f_{\mathrm{XY}}(x,y)\cdot(x+y) \\
&= \sum_x \sum_y f_{\mathrm{XY}}(x,y)\cdot x + \sum_x \sum_y f_{\mathrm{XY}}(x,y)\cdot y \\
&= \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y].
\end{aligned}$$

X だけ, Y だけの関数の母期待値

x だけ, y だけの関数の母期待値や分散は,

下の左辺= $\boxed{}$ で計算しても

下の右辺= $\boxed{}$ で計算しても

同じ.

$$\mathrm{E}[\phi(X)] = \sum_x \sum_y f_{\mathrm{XY}}(x,y) \cdot \phi(x) = \sum_x \phi(x) \sum_y f_{\mathrm{XY}}(x,y) = \sum_x \phi(x) \cdot f_{\mathrm{X}}(x)$$

$$\mathrm{E}[\phi(Y)] = \sum_y \sum_x f_{\mathrm{XY}}(x,y) \cdot \phi(y) = \sum_y \phi(y) \sum_x f_{\mathrm{XY}}(x,y) = \sum_y \phi(y) \cdot f_{\mathrm{Y}}(y)$$

ここまで来たよ

母共分散 塚田確率統計 §3.6 高校 数学 B

母共分散 covariance

X, Y が確率変数で, $\mu_\mathrm{X} = \mathrm{E}[X], \mu_\mathrm{Y} = \mathrm{E}[Y]$ であるとき,

$$\text{母共分散}\ \mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{E}[(X - \mu_\mathrm{X})(Y - \mu_\mathrm{Y})]$$
$$= \boxed{\text{塚田確率統計定理 3.6.1}} = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y].$$

母相関係数 covariance 塚田確率統計定理 3.6.2

X, Y が確率変数であるとき,

$$\text{母相関係数}\rho[X, Y] = \frac{\mathrm{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathrm{V}[X]}\sqrt{\mathrm{V}[Y]}}$$

は $-1 \leq \rho[X, Y] \leq 1$ を満たす.

L07-Q2

さっきの問いで母共分散は?

L07-Q3

塚田確率統計 §3.7 問 3

独立性 塚田確率統計 §2.4,§3.6 高校 数学 B

独立性

確率変数 X, Y が同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ を持つとする.
X, Y が独立とは,

$$f_{\mathrm{XY}}(x, y) = f_{\mathrm{X}}(x) \times f_{\mathrm{Y}}(y)$$

が成立することをいう (世の中には, 同値な定義が多数).

独立とは, X,Y が互いに $\boxed{}$
事象 A, B が独立 $\Leftarrow P(A$ かつ $B) = P(A) \times P(B)$ 塚田確率統計 2.4 の特別な場合.

独立性と母共分散 塚田確率統計定理 3.6.3

X, Y が独立なとき, 母共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$.

すぐ後で証明.

母共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$ は, X, Y が独立であるための $\boxed{}$ 条件.

L07-Q4

Quiz(離散型確率変数の独立性)

2 つの離散型確率変数 (X, Y) を考える．同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ は次の表で与えられる (現れない X, Y の確率は zero である).

$y \backslash x$	2	4
2	1/2	0
4	0	1/2

1. X, Y は独立かどうか判定しよう.
2. $\mathrm{E}[X], \mathrm{E}[Y], \mathrm{E}[XY], \mathrm{E}[X+Y], \mathrm{Cov}[X, Y], \rho[X, Y]$ を求めよう.

X, Y が独立であるとき'だけ'成立する性質

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\phi_1(X) \times \phi_2(Y)] =& \mathrm{E}[\phi_1(X)] \times \mathrm{E}[\phi_2(Y)] \\
\text{特に } \mathrm{Cov}[X, Y] =& (\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y] =)0 \\
\mathrm{V}[X + Y] =& \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[XY] =& \sum_x \sum_y f_{\mathrm{XY}}(x, y) \cdot x \cdot y \\
=& \sum_x \sum_y f_{\mathrm{X}}(x) \times f_{\mathrm{Y}}(y) \times x \times y \\
=& \sum_x f_{\mathrm{X}}(x) \cdot x \times \sum_y f_{\mathrm{Y}}(y) \cdot y = \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y] \\
\mathrm{V}[X + Y] =& \mathrm{E}[(X + Y)^2] - \mathrm{E}[X + Y]^2 \\
=& \mathrm{E}[X^2] + 2\mathrm{E}[XY] + \mathrm{E}[Y^2] - (\mathrm{E}[X]^2 + 2\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] + \mathrm{E}[Y]^2) \\
=& \mathrm{V}[X] + 2\mathrm{Cov}[X, Y] + \mathrm{V}[Y]
\end{aligned}
$$

L07-Q5

Quiz(独立な確率変数の期待値)

独立な確率変数 X, Y を考える.
$\mathrm{E}[X] = 2, \mathrm{E}[Y] = 3, \mathrm{V}[X] = 5, \mathrm{V}[Y] = 11,$ である.

1. $\mathrm{E}[(-2X + 3Y)(X + 5Y)]$ を求めよう.
2. $\mathrm{V}[-2X + 3Y]$ を求めよう.

L07-Q6

Quiz(独立と限らない確率変数の母期待値)

確率変数 X, Y を考える.
$\mathrm{E}[X] = 2, \mathrm{E}[Y] = 3, \mathrm{V}[X] = 5, \mathrm{V}[Y] = 11, \mathrm{Cov}[X, Y] = 7.$ である.

1. $\mathrm{E}[-2X + 3Y]$ を求めよう.
2. $\mathrm{V}[-2X + 3Y]$ を求めよう.

連絡

- 配布資料は 1-503 向かいの引出, `http://hig3.net` で再配布.
- 加減乗除と平方根 (ルート) の使える電卓持ってきてね. 関数電卓でなくてもいいです. 携帯電話の機能・アプリでもかまいません.
- 樋口オフィスアワー木 6 金昼 (1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)
- 次回は 塚田確率統計 §4.1 塚田確率統計 §4.2 塚田確率統計 §4.7

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`

プチテスト実施計画

日時 2016-11-17 木 1.

場所 7-002. 個人別座席指定あります.

配点 科目の 100 ピーナッツ中 30 ピーナッツ

持込 なし. 電卓もなし.

おすすめの準備方法 過去問もあるけど, 範囲が違います. 下の出題計画を参照して, すべての trial がスムーズにできるようになっておくとよいでしょう. 予習問題も再トライできます (点数は変化しません).

プチテスト出題計画案

2016-11-11 金に確定します (Web 参照). 多くの独立な小問からなる構成です. Excel の操作に関することは出題しません.
データの分散, 確率分布の母分散, ⋯ の違いに注意しましょう.

- データから平均値, 分散, 標準偏差を求める (Trial L02)
- データから四分位数などを求め, 箱ひげ図を描く (Trial L03)
- データから標準得点, 偏差値を求める (Trial L04)
- データから共分散, 相関係数, 回帰係数, 回帰直線を求める (紙レポート, Trial L05)
- 離散型確率変数について, 確率関数から確率, 母期待値, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める $\times n$ (Trial L06)
- 連続型確率変数について, 確率密度関数から確率, 母期待値, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める $\times n$ (Trial L07)
- 確率変数の 1 次式や 2 次式について, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める (Trial L06, 予習復習問題 L08)
- 2 次元の離散型確率分布について, 同時分布, 周辺分布, 独立性から母期待値, 母共分散, 母相関係数を求める, 独立かどうか判定する (予習復習問題 L08)
- いろんな量の正しい意味 (数学的, データ解釈的) を選ぶ/答える問題 (Trial にはない)